

УДК 532.546:949.8

## ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ ВЛИЯНИЯ ВИДА ФУНКЦИИ ЛЕВЕРЕТТА НА РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ РАППОПОРТА — ЛИСА

И. Г. Телегин<sup>1</sup>, О. Б. Бочаров<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Тюменский индустриальный университет, г. Тюмень, Россия

<sup>2</sup>Новосибирский Технологический Центр, АО «Бейкер Хьюз», г. Новосибирск, Россия

**Аннотация.** В работе рассматривается классическая математическая модель фильтрации двух несмешивающихся жидкостей в недеформируемой пористой среде с учетом капиллярных сил — модель Маскета — Леверетта (МЛ модель). В основе модели лежат экспериментально определяемые функции от водонасыщенности — относительные фазовые проницаемости и функция капиллярного давления Леверетта. В работе численно изучается одномерное радиальное течение с заданным расходом смеси. В этом случае уравнения МЛ модели приводятся к одному квазилинейному, вырождающемуся на решении гиперболо-параболическому уравнению для водонасыщенности — уравнению Раппопорта — Лиса. Исследуется влияние представления капиллярных сил в пористых средах различной структуры на поведение решения в изотермическом случае.

*Ключевые слова:* модель Маскета — Леверетта; капиллярное давление; уравнение Раппопорта — Лиса; функция Леверетта; водонасыщенность

## NUMERICAL ANALYSIS OF THE LEVERETT FUNCTION FORM INFLUENCE FOR THE RAPPOPORT — LEAS EQUATION SOLUTIONS

I. G. Telegin<sup>1</sup>, O. B. Bocharov<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Industrial University of Tyumen, Tyumen, Russia

<sup>2</sup>Novosibirsk Technology Center, JSC «Baker Hughes», Novosibirsk, Russia

**Abstract.** The article deals with the classical mathematical model of filtration of two immiscible liquids in a non-deformable porous medium taking into account capillary forces. It is the Muskat — Leverett model. The model is based on the experimentally determined functions of water saturation — relative phase permeability and the Leverett's function of capillary pressure. In the article we study numerically the one-dimensional radial flow with a given flow rate of the mixture. In this case, the Muskat — Leverett model equations are reduced to one quasilinear hyperbolic-parabolic equation for water saturation — Rappoport-Leas equation. The article investigates the influence of the representation of capillary forces in porous media of different structures on the behavior of solutions in the isothermal case.

*Key words:* Muskat — Leverett model; capillary pressure; Rappoport — Leas equation; Leverett's function; water saturation

### Введение

Наиболее распространенной математической моделью, описывающей фильтрацию несмешивающихся жидкостей в недеформируемой пористой среде с учетом капиллярных сил, является модель Маскета — Леверетта (МЛ модель) [1]. В осно-

ве модели лежат экспериментально определяемые функции от водонасыщенности — относительные фазовые проницаемости и функция капиллярного давления Леверетта. Ранее неоднократно отмечалось, что именно поведение функциональных параметров оказывает определяющее влияние на структуру решения [2–6]. В данной работе численно изучается одномерное течение с заданным расходом смеси  $Q$ . В этом случае уравнения МЛ модели приводятся к одному квазилинейному, вырождающемуся на решении гиперболо-параболическому уравнению для водонасыщенности [5] (уравнение Раппопорта — Лиса). В работе исследуется влияние капиллярных сил на структуру решения в изотермическом случае.

### Постановка задачи

Систему уравнений плоской радиальной изотермической фильтрации двухфазной несжимаемой жидкости в однородной пористой среде можно записать в виде [2]

$$\begin{cases} rm \frac{\partial s_i}{\partial t} = -\frac{\partial r v_i}{\partial r}, & v_i = -\frac{K_0 k_i(s)}{\mu_i} \frac{\partial p_i}{\partial r}, \quad i=1,2; \\ p_2 - p_1 = p_c(s) = (m_0 / K_0)^{1/2} \sigma j(s), & s_1 + s_2 = 1, \end{cases} \quad (1)$$

где  $r$  — пространственная переменная,  $0 \leq r \leq R$ ;  $R$  — радиус контура питания;  $t$  — время;  $s$  — динамическая водонасыщенность порового пространства, определяемая по формуле  $s = (s_1 - S_1^0) / (1 - S_1^0 - S_2^0)$ ;  $s_i$  — истинная насыщенность флюидом порового пространства (индекс  $i = 1$  соответствует вытесняющей фазе «воде», а  $i = 2$  — нефти);  $S_i^0$  — остаточная насыщенность  $i$ -ой фазы;  $p_i$  — давление в  $i$ -той фазе;  $m = m_0(1 - S_1^0 - S_2^0)$ ,  $m_0$  — пористость;  $K_0$  — тензор абсолютной проницаемости;  $k_i(s)$  — относительные фазовые проницаемости;  $a(s) = k_2(s)b(s)/\mu_2$ ,  $b(s) = k_1(s)/(k_1(s) + \mu k_2(s))$  — доля водной фазы в потоке;  $\mu = \mu_1/\mu_2$ ,  $\mu_i$  — вязкость  $i$ -ой фазы;  $k_i(s)$  — относительные фазовые проницаемости;  $p_c(s)$  — капиллярное давление;  $v_i$  — скорости фильтрации  $i$ -ой фазы,  $v = v_1 + v_2$ ;  $j(s)$  — функция Леверетта;  $\sigma$  — коэффициент поверхностного натяжения.

Свойства функциональных параметров МЛ модели, а также качественные свойства ее решений описаны в работах [2, 3].

Отметим, что  $k_1(0) = k_2(1) = j(1) = 0$ ;  $j(s) > 0$ ,  $dj/ds \leq 0$ ,  $s \in [0,1]$ .

В данной работе изучаются решения в условиях несжимаемости жидкостей, в горизонтальном несжимаемом однородном нефтяном пласте ( $\rho_i = \text{const}$ ,  $m_0 = \text{const}$ ,  $K_0 = \text{const}$ ).

Рассмотрим задачу о законтурном заводнении, то есть добывающая скважина будет в точке  $r = 0$ . Приняв темп законтурного заводнения постоянным  $|2\pi R v| = Q = \text{const}$ , введем безразмерные переменные:  $\tilde{r} = r/R$ ,  $\tilde{t} = tQ/(2\pi R^2 m)$ . Волна над безразмерными переменными далее опускается. Система (1) в этом случае сводится к одному уравнению (Раппопорта — Лиса) для водонасыщенности, которое запишется в следующем виде:

$$r \frac{\partial s}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial r} [\varepsilon r a(s) \frac{\partial p(s)}{\partial r} + b(s)], \quad (2)$$

где  $\varepsilon = 2\pi\sigma(m_0 K_0)^{1/2} / (Q\mu_2)$ ,  $p = -j(s)$ . При  $\varepsilon = 0$  будем иметь модель Баклея — Леверетта.

Для уравнения (2) рассмотрим начально-краевую задачу с заданным расходом вытесняющей фазы («воды») на контуре заводнения  $r = 1$  и с условием отбора фаз пропорционально их подвижности при  $r = 0$  [2, 7]:

$$s|_{t=0} = 0; \quad v_1|_{r=1} = -[\varepsilon a(s) \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{r} b(s)]|_{r=1} = -1, \quad \frac{\partial s}{\partial r}|_{r=0} = 0. \quad (3)$$

### О функциональных параметрах модели

Влияние параметров  $k_1$  и  $k_2$  на решение  $s(x, t)$  достаточно хорошо изучено [4, 8], поэтому обратим внимание на третий функциональный параметр — функцию Леверетта  $j(s)$ . В литературе встречаются зависимости разного вида. В данной работе мы использовали следующие параметры:  $k_1 = s^2$ ,  $k_2 = (1-s)^2$ , а функция Леверетта  $j(s)$  была взята в обобщенном виде:

$$j(s) = C_1 - C_1 s^\xi + (1 - C_1)(1 - s)^\omega, \quad \xi \geq 1, \quad \omega \geq 1, \quad C_1 \in (0, 1). \quad (4)$$

Условие корректности традиционных краевых задач для уравнения (2) накладывает только одно требование — монотонность  $j(s)$ ,  $dj(s)/ds \leq 0$  [2, 3]. Вид функции Леверетта определяется по натурным или экспериментальным данным.

Наиболее интересны случаи с участком, на котором  $dj(s)/ds = 0$ . На этом участке  $p_c(s) = \text{const} = P_v$ , а  $P_v$  — давление вытеснения. Как показывают наблюдения, пласт с большим диаметром однородных поровых каналов будет иметь низкое давление вытеснения ( $P_v$ ).

Если размер пор неодинаков (неоднородные поры), необходима дополнительная сила выталкивания для миграции углеводородов в мелкие поры, и поэтому форма кривой  $j(s)$  будет более пологой (рис. 1, тонкая линия, вариант 1).

Если размер пор приблизительно одинаков, порода быстро заполняется углеводородами после превышения давления вытеснения, и  $j(s)$  образует L-образную форму (см. рис. 1, жирная линия, вариант 2).

Если поры однородные и мелкие, то  $P_v$  будет больше, чем для пород с крупными порами (см. рис. 1, линия, отмеченная темными кружками, вариант 3). Легко увидеть, что формула (4) описывает все эти случаи, а  $P_v$  определяется через  $C_1$ . Далее варианту 1 будет соответствовать  $C_1 = 0,5, \xi = \omega = 5$ ; варианту 2 —  $C_1 = 0,01, \xi = \omega = 17$ ; варианту 3 —  $C_1 = 0,5, \xi = \omega = 17$ .

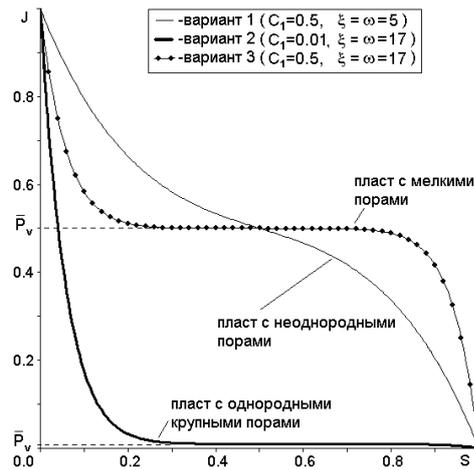


Рис. 1. Варианты функции Леверетта  $j(s)$ , на рисунке  $\bar{P}_v = P_v / \max(p_c)$

### Особенности вычислительного алгоритма

Введем сетку с распределенными узлами

$$E = \{r_i = ih, t^n = n\tau, n = 0, 1, 2, \dots, i = 0, \dots, N\},$$

$h = 1/N$  — шаг по пространственной координате;  $\tau = Kh^2$  — шаг по временной переменной,  $K = \tau/h^2$ .

Шаг  $h$  был взят равным 0,005 ( $N = 200$ ),  $\tau = 0,000025$ . При записи разностных схем используются обозначения, принятые в работе [10]. Уравнение для  $s(r, t)$  аппроксимировалось неявной разностной схемой первого порядка:

$$r_i \frac{s_i^{n+1} - s_i^n}{\tau} = \frac{\varepsilon}{h} (r_{i+1/2} a_{i+1/2}^n p_{r,i}^{n+1} - r_{i-1/2} a_{i-1/2}^n p_{r,i}^{n+1}) + b_{r,i}^{n+1}, i = \overline{1, N-1}, n = \overline{0, 1, \dots}; \quad (5)$$

$$s_{r,0}^{n+1} = 0; s_i^0 = 0, i = \overline{0, N}.$$

Краевое условие на правом конце в (3) аппроксимировалось с использованием уравнения (2) следующим образом:

$$\frac{h}{2} \frac{s_N^{n+1} - s_N^n}{\tau} = -\varepsilon \cdot r_{N-1/2} a_{N-1/2}^n p_{r,N-1}^{n+1} + 1 - b_{N-1/2}^{n+1}.$$

Для нелинейных функций  $b(s)$  и  $p(s)$  применялась линеаризация по Ньютону

$$b(s_i^{n+1}) = b(s_i^n) + \frac{db_s(s_i^n)}{ds} (s_i^{n+1} - s_i^n), \quad p(s_i^{n+1}) = p(s_i^n) + \frac{dp_s(s_i^n)}{ds} (s_i^{n+1} - s_i^n).$$

Полученная система линейных уравнений решалась методом правой прогонки. Для контроля и анализа полученных решений на каждом временном шаге вычислялась обводненность нефтяного пласта  $\eta(t) = 2 \int_0^1 r \cdot s(r, t) dr \cdot 100\%$ , которую находили численным интегрированием по формуле трапеций. В дальнейшем для всех случаев проводится сравнение вариантов 1–3 представлений функции Леверетта.

### Влияние интенсивности капиллярных сил (разные $\varepsilon$ )

На рисунке 2 представлена серия решений задачи (3), при заданных параметрах  $\varepsilon = 0,1$  и  $\mu = 0,1$ .

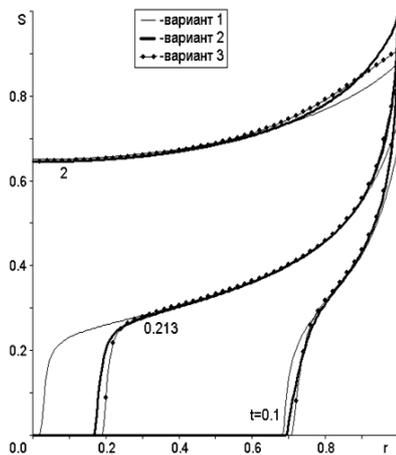


Рис. 2. Решения  $s(r, t)$  при разных функциях Леверетта  $j(s)$ ,  $\varepsilon = 0,1$  и  $\mu = 0,1$

Из рисунка следует, что в случае варианта 1 вытеснение проходит в наихудших условиях: медленное обводнение линии нагнетания, ранний приход воды на добывающую скважину.

В случае варианта 2 вытеснение проходит в лучших условиях: хорошее обводнение линии нагнетания ( $r = 1$ ), поздний приход воды на добывающую скважину ( $r = 0$ ).

Случай варианта 3 — промежуточный между вариантами 1 и 2, поздний приход воды на добывающую скважину, умеренное обводнение линии нагнетания.

Для более наглядного определения влияния капиллярных сил на структуру решения (рис. 3 а) приведены решения с  $\varepsilon = 10$ .

Соответствующие обводненности  $\eta(t)$  представлены на рисунке 3 б. Из

рисунка 3 можно выделить следующие особенности решений с разными  $j(s)$ .

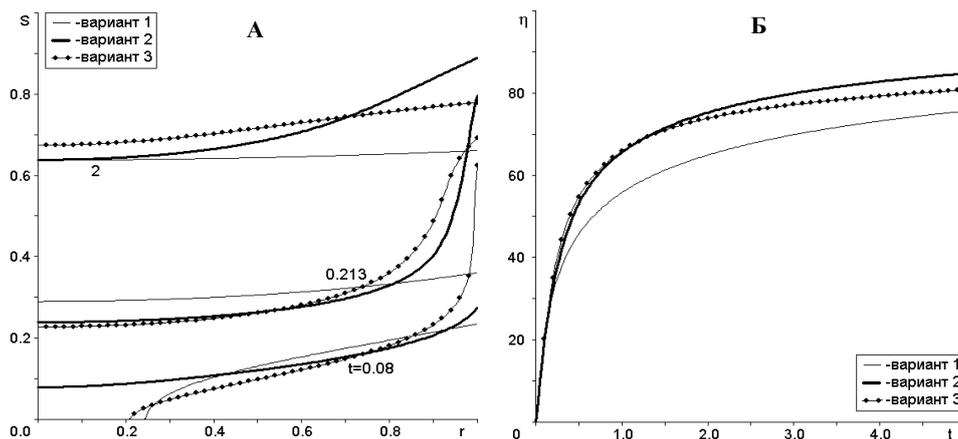


Рис. 3. Решения с разными функциями  $j(s)$ ,  $\varepsilon = 10$  и  $\mu = 0,1$  А)  $s(r,t)$ ; Б)  $\eta(t)$

Вариант 1. Как и при  $\varepsilon = 0,1$  (см. рис. 2) вытеснение проходит в худших условиях: медленное обводнение линии нагнетания, график  $\eta(t)$  расположен ниже других вариантов. Имеет место более поздний приход воды на добывающую скважину.

Вариант 2. В этом случае вытеснение проходит в лучших условиях: интенсивное обводнение линии нагнетания, график  $\eta(t)$  расположен выше других вариантов, однако имеет место более ранний приход воды на добывающую скважину. Интересная особенность решения наблюдается на ранних стадиях — формирование зоны больших градиентов профиля водонасыщенности в окрестности линии нагнетания.

Вариант 3. Этот вариант характеризуется быстрым ростом водонасыщенности в окрестности нагнетательной скважины на начальном этапе заводнения. Скачок водонасыщенности (зона больших градиентов) в окрестности линии нагнетания формируется уже при  $t = 0,08$ . График  $\eta(t)$  вначале расположен выше остальных, однако после  $t > 1,2$  обводненность отстает от варианта 2.

Особенностью задачи в радиальных переменных является наличие перед диффузионным слагаемым члена  $r$ . На структуру решения этот параметр влияет кардинальным образом: по мере приближения к эксплуатационной скважине усиливается влияние конвективных сил, и ослабляется влияние капиллярных. В окрестности добывающей скважины капиллярные силы настолько малы, что становятся существенно меньше погрешности аппроксимации разностной схемы. Увеличение параметра  $\varepsilon$  до 10 значительно усилило активность капиллярных сил, так, на рисунке 4 представлены графики функции  $Z(r,t) = |\varepsilon a(s) \frac{\partial p}{\partial r} / b(s)|$ , характеризующей отношение капиллярного потока к

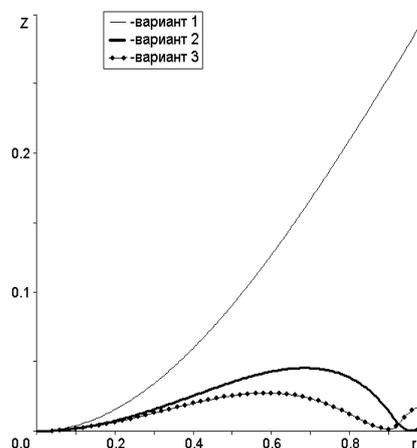


Рис. 4. Функции  $Z(r, t)$  при  $t = 0,22$ ,  $\varepsilon = 10$  и  $\mu = 0,1$

конвективному при  $t = 0,22$ . Из рисунка следует, что в варианте 1 функция  $Z$  расположена выше остальных вариантов и является монотонно возрастающей.

В этом случае капиллярные силы работают равномерно во всем диапазоне насыщенностей и формируют пологое распределение водонасыщенности (см. рис. 3 а). В вариантах 2 и 3 функция  $Z(r, 0,22)$  имеет немонотонный вид. Локальные минимумы в окрестности линии нагнетания соответствуют наличию точек перегиба на профиле водонасыщенности (см. рис. 3 а), что связано с образованием зоны больших градиентов, условно можно сказать скачку водонасыщенности. Это в свою очередь приводит к росту влияния капиллярных сил ( $Z$ ) в непосредственной окрестности зоны нагнетания. Локальные максимумы появляются в зоне переднего фронта вытеснения, тоже области больших градиентов.

### Проявление различий в подвижностях фаз на фоне действия капиллярных сил

Фазовая подвижность характеризуется величиной  $k_i(s)/\mu_i$ . То есть здесь проявляется различие в вязкостях и относительных фазовых проницаемостях.

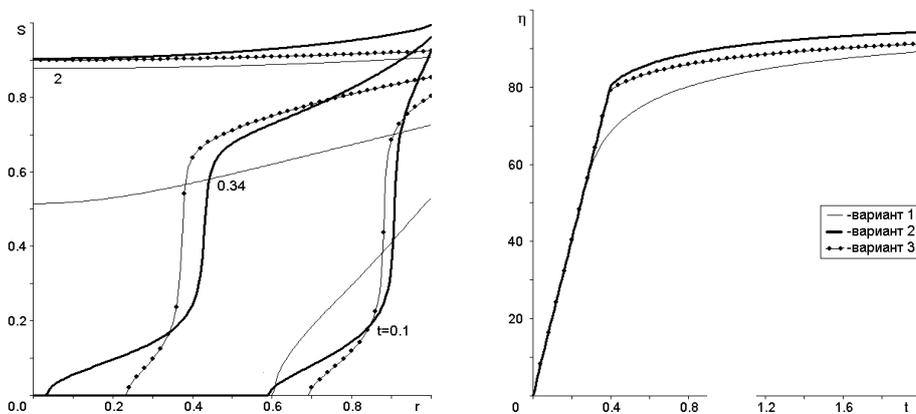


Рис. 5. Решения с разными  $j(s)$  при  $\varepsilon = 10$  и  $\mu = 1$  А)  $s(r,t)$ ; Б)  $\eta(t)$

Расчеты при  $\mu = 1$  для трех вариантов, при старых относительных фазовых проницаемостях, приведены на рисунке 5. Полученные решения (см. рис. 5 а) имеют две особенности, отличающие их от случая с  $\mu = 0,1$  (см. рис. 3 а):

- 1) классический скачок водонасыщенности трансформируется с образованием за счет действия капиллярных сил опережающего носика (варианты 2, 3). Эти носики не исчезают со временем и доходят до точки  $r = 0$  (добывающая скважина);
- 2) в пласте с разнородными порами (вариант 1) наблюдается существенно опережающий приход воды на добывающую скважину.

Особенностью решений при  $\mu = 0,01$  (рис. 6) является формирование в вариантах 2 и 3 фронтов насыщенности в окрестности нагнетающего контура на поздних стадиях, которые медленно смещаются к добывающей скважине. В этом случае «баклеевская» фронтальная насыщенность  $s_c = 0,0995$ , и второй фронт вытеснения определяется как раз работой капиллярных сил.

Для изучения вопроса влияния относительных фазовых проницаемостей на решения в условиях вариантов 1–3 была проведена серия расчетов с фиксированными  $\varepsilon = 10$ ,  $\mu = 0,1$  и с разными  $k_i$ , которые были взяты в виде полиномиальных функций [10]:

$$k_1(s) = s^\alpha, k_2(s) = s^\beta, \quad (6)$$

при этом изменялись степени  $\alpha \in [1;5]$  и  $\beta \in [1;5]$ . На рисунке 7 приведены результаты расчетов при  $\alpha = \beta = 3$ .

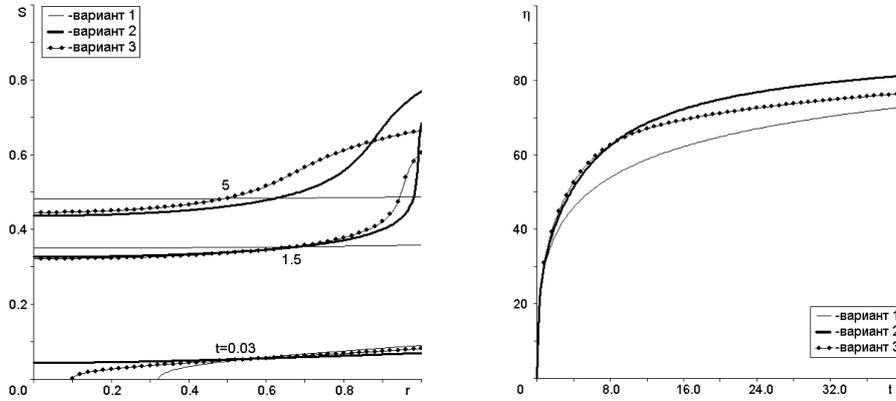


Рис. 6. Решения с разными  $j(s)$  при  $\varepsilon = 10$  и  $\mu = 0,01$ ; А)  $s(r, t)$ ; Б)  $\eta(t)$

Отметим особенности решений, характерные для  $\alpha, \beta \leq 3$ :

- в пласте с разнородными порами (вариант 1) имеет место опережающий приход воды на добывающую скважину;
- капиллярные силы в варианте 1 работают равномерно, что обеспечивает наличие одного переднего фронта вытеснения, а далее, в общем, плавное изменение водонасыщенности;
- в вариантах 2 и 3 классический скачок водонасыщенности трансформируется в волнообразную структуру; капиллярные силы размывают, сглаживают скачки вне зон с  $|dj(s)/ds| \ll 1$ .

При  $\alpha$  и  $\beta$  больше 3 решения по вариантам 2 и 3 становятся мало отличимыми от решений по модели Баклея — Леверетта (отсутствие капиллярных сил) в промежутке  $s \in (0;0,7)$  (рис. 8). Различия с БЛ моделью проявляются только вблизи линии нагнетания.

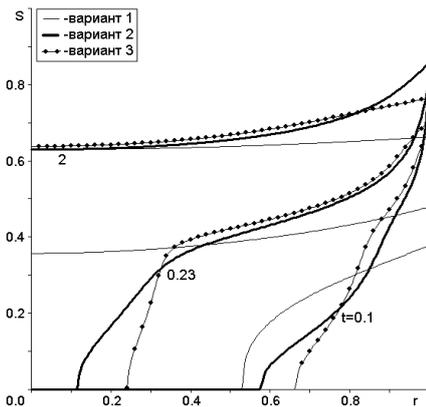


Рис. 7. Решения  $s(r,t)$  с разными  $j(s)$  при  $\alpha = \beta = 3$ ,  $\varepsilon = 10$ ,  $\mu = 0,1$

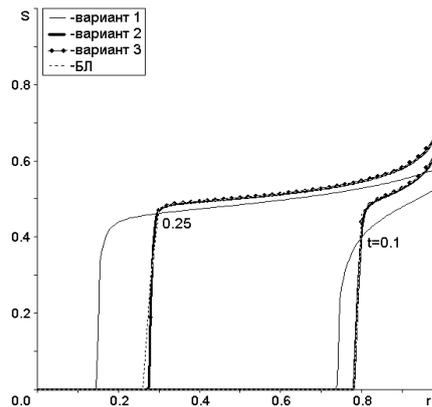


Рис. 8. Решения  $s(r,t)$  с разными  $j(s)$  при  $\alpha = \beta = 5$ . Сравнение с БЛ моделью

## Выводы

Как показывают численные расчеты, при невысоких темпах вытеснения в однородном по размерам пор нефтяном пласте (варианты 2, 3) может сформироваться скачок водонасыщенности (зона больших градиентов) вблизи нагнетательной скважины, этот скачок при движении к добывающей скважине размазывается, однако в ряде случаев все-таки достигает зоны отбора, что характеризуется резким ростом обводнения продукции. Если же пласт сложен породами с неоднородными порами, то скачок водонасыщенности не образуется, и темп обводнения пласта ниже, чем для вариантов с однородным по размерам пор пластом.

### Библиографический список

1. Коллинз Р. Течения жидкостей через пористые материалы. – М.: Мир. –1964. – 353 с.
2. Бочаров О. Б. Пеньковский В. И. Введение в теорию фильтрации жидкостей и газов в пористых средах. – Новосибирск: Изд-во НГУ, 2005. – 132 с.
3. Антонцев С. Н., Кажихов А. В., Монахов В. Н. Краевые задачи механики неоднородных жидкостей. – Новосибирск: СО АН СССР, Наука. –1983. – 316 с.
4. Бочаров О. Б., Кузнецов В. В., Чехович Ю. В. О структуре решений задачи Раппопорта — Лиса // Динамика сплошной среды. – Новосибирск. – 1988. – Вып. 85. – С. 13–21.
5. Rappoport L. A., Leas W. J. Properties of linear water floods / Trans. AIME. 1953. Vol. 198. – P. 139–148.
6. Швидлер М. И., Леви Б. И. Одномерная фильтрация несмешивающихся жидкостей. – М.: Недра. – 1970. – 156 с.
7. Бочаров О. Б., Телегин И. Г. Влияние граничных условий на водонасыщенность вблизи скважин // Известия высших учебных заведений. Нефть и газ. – 2011. – № 2. – С. 19–26.
8. Дмитриев Н. М., Максимов В. М. Обобщенный закон Дарси. Фазовые и относительные проницаемости для фильтрационных течений в анизотропных пористых средах // Моделирование процессов фильтрации и разработки нефтяных месторождений: сб. – Казань, 1992.
9. Самарский А. А. Введение в теорию разностных схем. – М.: Наука. – 1971. – 552 с.
10. Развитие исследований по теории фильтрации в СССР (1917–1967). – М.: Наука. – 1969. – 546 с.

### Сведения об авторах

**Телегин Игорь Григорьевич**, к. ф.-м. н., Тюменский индустриальный университет, г. Тюмень, тел. 8(3452)670036, e-mail: igtelegin@yandex.ru

**Бочаров Олег Борисович**, к. ф.-м. н., доцент, Новосибирский технологический центр, АО «Бейкер Хьюз», г. Новосибирск, тел. 8(383)3332808, e-mail: oleg.bocharov@bakerhughes.com

### Information about the authors

**Telegin I. G.**, Candidate of Physics and Mathematics, Industrial University of Tyumen, phone: 8(3452)670036, e-mail: igtelegin@yandex.ru

**Bocharov O. B.**, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Novosibirsk Technology Center, JSC «Baker Hughes», Novosibirsk, phone: 8(383)3332808, e-mail: oleg.bocharov@bakerhughes.com