УДК 621.833.2(31)

ПРОДОЛЬНАЯ МОДИФИКАЦИЯ ПОВЕРХНОСТИ ЗУБА КОЛЕСА ПОЛУОБКАТНОЙ ПРЯМОЗУБОЙ ПЛОСКОКОНИЧЕСКОЙ ПЕРЕДАЧИ

LONGITUDINAL CROWNING OF THE GEAR TOOTH SURFACE OF STRAIGHT BEVEL GEARS WITH A SMALL SHAFT ANGLE WITH NON-GENERATED GEAR AND GENERATED PINION

А. А. Пазяк, В. Н. Сызранцев
A. A. Pazyak, V. N. Syzrantsev

Тюменский индустриальный университет, г. Тюмень

Ключевые слова: ***плоскоконическая передача; модификация зубьев по длине***
Key words: ***bevel gears with a small shaft angle; longitudinal crowning of the gear tooth***

Соосный редуктор [1] на основе плоскоконической передачи [2] является основным звеном ряда перспективных приводов различного нефтегазового оборудования [3, 4], однако формообразование зубьев колес обкатной передачи возможно только на специальных зуборезных станках. Известно, что исполнение конических передач в полуобкатном варианте [5] позволяет существенно упростить технологический процесс изготовления колес. В работах [6, 7] рассмотрена геометрия полуобкатной плоскоконической передачи с прямыми по длине зубьями, контактирующими в зацеплении по линии. При отсутствии погрешностей изготовления зубьев колеса и шестерни, а также погрешностей взаимного положения шестерни и колеса, передача будет иметь наибольшую нагрузочную способность. В то же время в реальной передаче отмеченные условия не соблюдаются. Вследствие погрешностей изготовления и сборки элементов передачи в зацеплении поверхностей зубьев возникает их перекос, приводящий к концентрации напряжений по длине контактных линий. Кроме этого, в процессе работы зубья колеса и шестерни под действием передаваемой нагрузки деформируются (изгибные и контактные деформации), что не только изменяет кинематику передачи, но и приводит к ударам зубьев при входе в зацепление. С целью снижения влияния отмеченных выше условий контактирования поверхностей зубьев на нагруженность и на несущую способность конических передач в практике их проектирования и изготовления [8, 9] используют различные способы модификации поверхностей зубьев как в профильном, так и в продольном направлении. В результате модификации поверхностей зубьев сопряженность конической передачи (передаточная функция) нарушается [9]. Однако, как показано в работах [8, 9], отклонение передаточной функции от постоянной величины, равной передаточному отношению, в геометрически несопряженных конических передачах, удается значительно уменьшить, если учесть деформации зубьев колеса и шестерни вследствие нагружения их при передаче заданного крутящего момента. Решение данной задачи требует определенной

модификации активных поверхностей зубьев, параметры которой определяются в процессе синтеза передачи [5, 8, 9]. Такие передачи, в отличие от сопряженных, носят название передач с приближенным зацеплением. Следует подчеркнуть, что именно приближенные передачи в условиях эксплуатации обладают наибольшей нагрузочной способностью и долговечностью и широко распространены в практике машиностроения.

В настоящей статье рассматривается способ модификации поверхности зуба колеса плоскоконической передачи, обеспечивающий в зацеплении с прямозубой шестерней локализацию пятна контакта в продольном направлении зубьев.

С целью удобства записи расчетных зависимостей ниже будем использовать нижний индекс 1 для шестерни и индекс 2 для колеса. На основании работ [6, 7], проекции x_2, y_2, z_2 радиуса-вектора $\bar{r}_2$ поверхности прямого зуба колеса в системе координат $S_2(x_2, y_2, z_2)$, жестко связанной с колесом, имеют вид

$$x_2 = -h_2 \cdot \sin\theta_{f2} - u_2 \cdot \cos\theta_{f2} - r_2;\ y_2 = -(t + h_2 \cdot \sin\alpha_n); \tag{1}$$

$$z_2 = h_2 \cdot \cos\theta_{f2} - u_2 \cdot \sin\theta_{f2},$$

где u_2, h_2 — линейные координаты по длине и по профилю зуба колеса; θ_{f2} — угол ножки зуба колеса; r_2 — средний делительный радиус колеса; α_n — угол профиля исходного производящего контура; t — половина ширины впадины зуба колеса.

Проекции координат m_{2x}, m_{2y}, m_{2z} орта нормали $\bar{m}_2$ поверхности прямого зуба колеса в системе координат $S_2(x_2, y_2, z_2)$ имеют выражения

$$m_{2x} = -\sin\theta_{f2} \cdot \sin\alpha_n; \quad m_{2y} = \cos\alpha_n; \quad m_{2z} = \cos\theta_{f2} \cdot \sin\alpha_n. \tag{2}$$

Поверхность прямого зуба шестерни является [6, 7] огибающей семейства поверхностей зуба колеса (1). Проекции x_1, y_1, z_1 радиус-вектора $\bar{r}_1$ поверхности прямого зуба шестерни в системе координат $S_1(x_1, y_1, z_1)$, жестко связанной с шестерней, описываются [6] следующим образом:

$$x_1 = A_1 \cdot \cos\phi_1 + B_1 \cdot \sin\phi_1;\ y_1 = -A_1 \cdot \sin\phi_1 + B_1 \cdot \cos\phi_1;$$

$$z_1 = \sin\Sigma \cdot (f_3 \cdot \sin\phi_2 - f_1 \cdot \cos\phi_2) + \cos\Sigma \cdot (f_2 + d) - c; \tag{3}$$

$$\phi_2 = \arcsin\left[-C_\phi \cdot \left(\sqrt{A_\phi^2 + B_\phi^2}\right)^{-1}\right] - \xi;$$

где

$$A_1 = \cos\Sigma \cdot (f_1 \cdot \cos\phi_2 - f_3 \cdot \sin\phi_2) + \sin\Sigma \cdot (f_2 + d);$$

$$B_1 = f_3 \cdot \sin\phi_2 - f_1 \cdot \cos\phi_2;$$

$$A_\phi = \sin\alpha_n \cdot \sin\Sigma \cdot (u_1 + d \cdot \sin\theta_{f2} - r_2 \cdot \cos\theta_{f2});$$

$$B_\phi = -\sin\Sigma \cdot \left(f_2 \cdot \cos\alpha_n - f_3 \cdot \sin\alpha_n \cdot \cos\theta_{f2} + d \cdot \cos\alpha_n \right);$$

$$C_\phi = \left(i^{-1} - \cos\Sigma \right) \cdot \left(f_1 \cdot \cos\alpha_n + f_3 \cdot \sin\theta_{f2} \cdot \cos\alpha_n \right);$$

$$f_1 = u_1 \cdot \cos\theta_{f2} - h_1 \cdot \sin\theta_{f2} \cdot \cos\alpha_n - r_2;$$

$$f_2 = u_1 \cdot \sin\theta_{f2} + h_1 \cdot \cos\theta_{f2} \cdot \cos\alpha_n; \quad f_3 = t - h_1 \cdot \sin\alpha_n;$$

$$c = r_1 \cdot (i - \cos\Sigma) \cdot (\sin\Sigma)^{-1}; \quad d = r_1 \cdot (i \cdot \cos\Sigma - 1) \cdot (\sin\Sigma)^{-1},$$

где u_1, h_1 — линейные координаты по длине и по профилю зуба шестерни; r_1 — средний делительный радиус шестерни; Σ — межосевой угол в передаче; ϕ_2 — угол поворота колеса в станочном зацеплении; $\phi_1 = i \cdot \phi_2$ — угол поворота шестерни в станочном зацеплении; $i = z_2^* / z_1^*$; z_1^*, z_2^* — числа зубьев, соответственно, шестерни и колеса.

Последним в (3) записано уравнение связи параметров $f\left(u_1, h_1, \phi_1\right) = 0$. — уравнение зацепления [7, 8], в котором вспомогательный угол ξ определяется на основе значений его тригонометрических функций:

$$\sin\xi = B_\phi \cdot (\sqrt{A_\phi^2 + B_\phi^2})^{-1}; \quad \cos\xi = A_\phi \cdot (\sqrt{A_\phi^2 + B_\phi^2})^{-1}.$$

Проекции координат m_{1x}, m_{1y}, m_{1z} орта нормали $\overline{m}_1$ поверхности прямого зуба шестерни в системе координат $S_1(x_1, y_1, z_1)$ описываются формулами:

$$\begin{aligned} m_{1x} &= -\sin\theta_{f2} \cdot \sin\alpha_n \cdot (\cos\phi_1 \cdot \cos\Sigma \cdot \cos\phi_2 + \sin\phi_1 \cdot \sin\phi_2) + \\ &+ \cos\alpha_n \cdot (-\cos\phi_1 \cdot \cos\Sigma \cdot \sin\phi_2 + \sin\phi_1 \cdot \cos\phi_2) + \cos\theta_{f2} \cdot \sin\alpha_n \cdot \cos\phi_1 \cdot \sin\Sigma; \\ m_{1y} &= -\sin\theta_{f2} \cdot \sin\alpha_n \cdot (-\sin\phi_1 \cdot \cos\Sigma \cdot \cos\phi_2 + \cos\phi_1 \cdot \sin\phi_2) + \\ &+ \cos\alpha_n \cdot (\sin\phi_1 \cdot \cos\Sigma \cdot \sin\phi_2 + \cos\phi_1 \cdot \cos\phi_2) - \cos\theta_{f2} \cdot \sin\alpha_n \cdot \sin\phi_1 \cdot \sin\Sigma; \\ m_{1z} &= \sin\theta_{f2} \cdot \sin\alpha_n \cdot \sin\Sigma \cdot \cos\phi_2 + \cos\alpha_n \cdot \sin\Sigma \cdot \sin\phi_2 + \cos\theta_{f2} \cdot \sin\alpha_n \cdot \cos\Sigma. \end{aligned} \tag{4}$$

Рассмотрим способ формообразования поверхности зуба колеса с продольной модификацией (рис. 1). В отличие от процесса нарезания прямого зуба [6, 7], в данном способе прямолинейная режущая кромка инструмента, точки которой в системе координат $S_p(x_p, y_p, z_p)$ задаются параметром h_2, перемещается на величину параметра u_2 параллельно проекции конуса впадин в плоскости $z_2 O_2 x_2$ и одновременно по оси z_p на некоторую величину, определяемую функцией $\Delta(u_2)$. В расчетной точке P зуба колеса (при $u_2 = 0$) функция $\Delta(0) = 0$, а при изменении параметра u_2 как в сторону положительных, так и отрицательных значений, функция $\Delta(u_2)$ плавно возрастает. В результате такого движения режущей кромки инструмента зуб колеса приобретает бочкообразную форму.

Для получения выражений проекций x_2, y_2, z_2 радиуса-вектора $\bar{r}_2$ зуба колеса с продольной модификацией в системе координат $S_2(x_2, y_2, z_2)$, жестко связанной с колесом, в системе координат $S_p(x_p, y_p, z_p)$, связанной с производящей кромкой (см. рис. 1), зададим ее уравнение в виде

$$x_p = 0; \quad y_p = -(t + h_2 \cdot \sin\alpha_n); \quad z_p = h_2 \cdot \cos\alpha_n. \tag{5}$$

Функциональную зависимость $\Delta(u_2)$ представим в виде эллипса, всегда касающегося в плоскости $z_{po}P\ x_{po}$ (см. рис.1) в расчетной точке P координатной оси x_{po}

$$\Delta(u_2) = a \cdot \cos\chi_p \left\{\cos\left[\vartheta(u_2)\right] - \cos\vartheta_p\right\} + b \cdot \sin\chi_p \left\{\sin\left[\vartheta(u_2)\right] - \sin\vartheta_p\right\}, \tag{6}$$

где a, b — малая и большая полуоси эллипса; ϑ_p — угол, нулевое значение которого обеспечивает симметричный вид зависимости $\Delta(u_2)$, а при $\vartheta_p \neq 0$ зависимость $\Delta(u_2)$ становится несимметричной относительно $u_2 = 0$; χ_p — угол, рассчитываемый по формуле: $\chi_p = arctg\left(a \cdot tg\vartheta_p / b\right)$; угол $\vartheta(u_2)$ определяет текущую точку (при $u_2 = const$) эллипса и рассчитывается по выражению

$$\vartheta(u_2) = \arcsin\frac{u_2 + b \cdot \cos\chi_p \sin\vartheta_p - a \cdot \sin\chi_p \cdot \cos\vartheta_p}{\sqrt{(a \cdot \sin\chi_p)^2 + (b \cdot \cos\chi_p)^2}} - \xi_u. \tag{7}$$

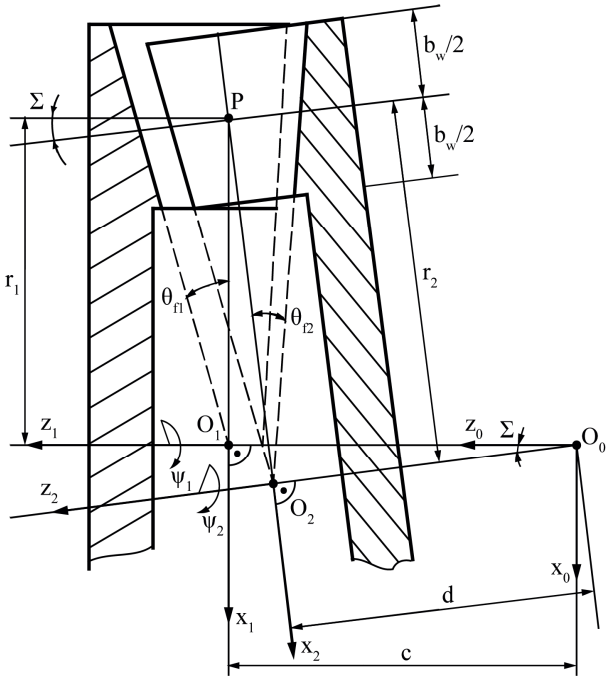

Рис. 1. ***Расчетная схема и используемые системы координат***

Входящий в (7) вспомогательный угол ξ_u вычисляется на основе значений его тригонометрических функций:

$$\sin\xi_u = \frac{-a\cdot\sin\chi_p}{\sqrt{(a\cdot\sin\chi_p)^2+(b\cdot\cos\chi_p)^2}};\ \cos\xi_u = \frac{b\cdot\cos\chi_p}{\sqrt{(a\cdot\sin\chi_p)^2+(b\cdot\cos\chi_p)^2}}. \qquad (8)$$

Уравнения поверхности зуба колеса с продольной модификацией определим, воспользовавшись матричным выражением:

$$\tilde{r}_2 = \tilde{A}_{2p}\cdot\tilde{r}_p, \qquad (9)$$

где $\tilde{r}_2$ — матрица-столбец, составленная из проекций (5); $\tilde{r}_2$ — матрица-столбец, составленная из проекций x_2, y_2, z_2 радиуса-вектора $\bar{r}_2$ боковой поверхности зуба колеса; $\tilde{A}_{2p}$ — матрица перехода четвертого порядка от системы координат $S_p(x_p, y_p, z_p)$ к системе координат $S_2(x_2, y_2, z_2)$.

Элементы матрицы $\tilde{A}_{2p}$, на основе рис. 1, описываются формулами

$$\tilde{A}_{2p} = \begin{vmatrix} \cos\theta_{f2}; & 0; & -\sin\theta_{f2}; & \Delta(u_2)\cdot\sin\theta_{f2} - u_2\cdot\cos\theta_{f2} - r_2; \\ 0; & 1; & 0; & 0; \\ \sin\theta_{f2}; & 0; & \cos\theta_{f2}; & -\Delta(u_2)\cdot\cos\theta_{f2} - u_2\cdot\sin\theta_{f2}; \\ 0; & 0; & 0; & 1. \end{vmatrix}. \qquad (10)$$

Раскрывая (9) с учетом (5) и (10), получим выражения для проекций координат поверхности зуба колеса:

$$\begin{aligned} x_2 &= \sin\theta_{f2}\left[\Delta(u_2)-h_2\right] - u_2\cdot\cos\theta_{f2} - r_2; \\ y_2 &= -(t + h_2\cdot\sin\alpha_n); \\ z_2 &= -\cos\theta_{f2}\left[\Delta(u_2)-h_2\right] - u_2\cdot\sin\theta_{f2}. \end{aligned} \qquad (11)$$

Проекции m_{2x}, m_{2y}, m_{2z} орта нормали $\bar{m}_2$ этой поверхности в системе координат $S_2(x_2, y_2, z_2)$ имеют вид:

$$m_{2x} = -\frac{\sin\alpha_n\cdot\left[\cos\theta_{f2}\cdot\Delta'(u_2)+\sin\theta_{f2}\right]}{\sqrt{\sin^2\alpha_n\left\{\left[\Delta'(u_2)\right]^2+1\right\}+\cos^2\alpha_n}};\ m_{2y} = \frac{\cos\alpha}{\sqrt{\sin^2\alpha_n\left\{\left[\Delta'(u_2)\right]^2+1\right\}+\cos^2\alpha_n}};$$

$$m_{2z} = -\frac{\sin\alpha_n\cdot\left[\sin\theta_{f2}\cdot\Delta'(u_2)-\cos\theta_{f2}\right]}{\sqrt{\sin^2\alpha_n\left\{\left[\Delta'(u)\right]^2+1\right\}+\cos^2\alpha_n}}, \qquad (12)$$

где $$\Delta'(u_2) = a\cdot\cos\chi_p\cdot\left[\frac{-e_c(p+u_2)+\sqrt{\left[e_c(p+u_2)\right]^2-n\left[(p+u_2)^2-k_c\right]}}{n} - \cos\vartheta_p\right] +$$

$$+b\cdot\sin\chi_p\left[\frac{-e_s(p+u_2)+\sqrt{\left[e_s(p+u_2)\right]^2-n\left[(p+u_2)^2-k_s\right]}}{n}\left(\frac{\vartheta_p}{|\vartheta_p|}\right) - \sin\vartheta_p\right] \qquad (13)$$

$$e_c = a \cdot \sin\chi_p;\ k_c = b^2 \cdot \sin\chi_p;\ e_s = b \cdot \cos\chi_p;\ k_s = a^2 \cdot \sin^2\chi_p;$$
$$n = a^2 \cdot \sin^2\chi_p + b^2 \cdot \cos^2\chi_p;\quad p = b \cdot \cos\chi_p \sin\vartheta_p - a \cdot \sin\chi_p \cos\vartheta_p.$$

Определим зависимости для расчета точек сечения модифицированной поверхности зуба колеса плоскостью $z_2 = 0$. На основании (11) запишем

$$z_2 = -\cos\theta_{f2}\left[\Delta(u_2) - h_2\right] - u_2 \cdot \sin\theta_{f2} = 0. \tag{14}$$

Из формулы (14) следует, что $h_2 = \Delta(u_2) + u_2 \cdot tg\theta_{f2}$.

Подставляя это выражение в выражения для расчета x_2 и y_2 (11), определим

$$x_2 = -\frac{u_2 + r_2 \cdot \cos\theta_{f2}}{\cos\theta_{f2}};\quad y_2 = -\left\{(t + \left[\Delta(u_2) + u_2 \cdot tg\theta_{f2}\right] \cdot \sin\alpha_n\right\}. \tag{15}$$

Полученные выражения использованы в разработанной в среде MathCad программе, с использованием которой выполнены расчеты отклонений модифицированной поверхности зуба колеса от поверхности прямого зуба (рис. 2) при различных видах функции $\Delta(u_2)$, параметрах эллипса (первый вариант: a = 10 мм, $b = 200$ мм, $\vartheta_p = -1{,}1$; второй вариант: a = 10 мм, $b = 200$ мм, $\vartheta_p = 1{,}1$; третий вариант: a = 10 мм, $b = 50$ мм, ϑ_p = 0,01). Анализировалась плоскоконическая передача, имеющая параметры: z_1^* = 64; z_2^* = 65; нормальный модуль m = 5мм; Σ = 2°; ширина зубчатого венца b_w = 50мм.

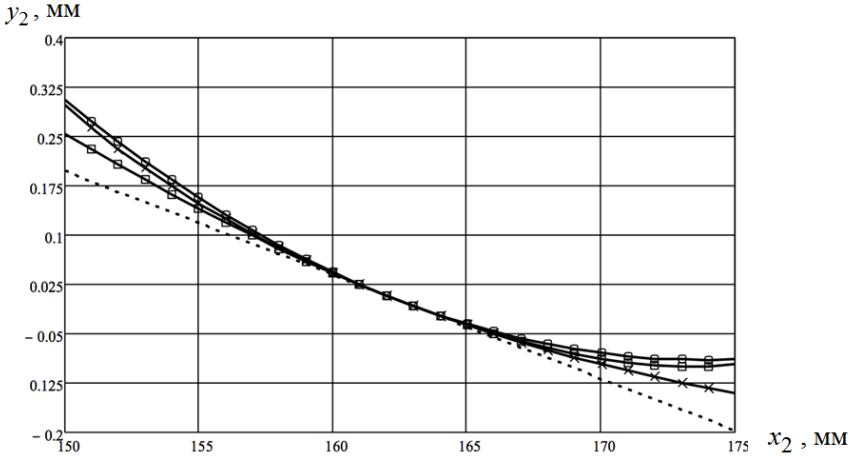

Рис. 2. ***Продольное сечение прямого (штриховая линия) и модифицированного зуба колеса. Вариант 1 (крестики), вариант 2 (прямоугольники), вариант 3 (кружки)***

Функция $\Delta(u_2)$ для всех трех вариантов задания параметров эллипса (6) показана на рис. 3. В соответствии с данной функцией при нарезании колеса, например, на горизонтально фрезерном станке с числовым программным управлением дис-

ковой модульной фрезой, программируется закон перемещения ее центра вращения относительно продольного направления нарезаемой впадины зуба.

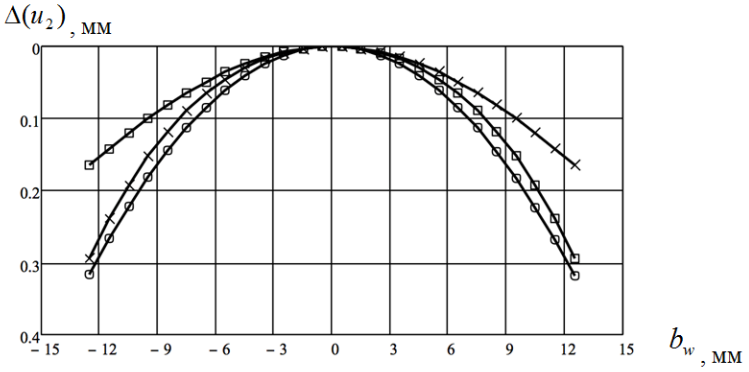

Рис. 3. ***Функция*** $\Delta(u_2)$ ***для трех вариантов***

Основные результаты работы

- Для локализации пятна контакта в зацеплении полуобкатной плоскоконической передачи предложен способ продольной модификации поверхности зуба колеса, заключающийся в сообщении режущему инструменту при нарезании впадины зуба дополнительного перемещения по определенному закону.
- Закон перемещения инструмента описан с помощью участка эллипса, который независимо от значений его параметров всегда касается расчетной точки зуба колеса, что позволило для процесса модификации поверхности зуба колеса число независимых (варьируемых) параметров увеличить до трех.
- Разработаны математические модели, описывающие поверхность зуба колеса при реализации предложенного способа. Показано, что изменение закона движения инструмента при нарезании впадины зуба колеса обеспечивает различные (симметричные, асимметричные) отклонения модифицированной поверхности по отношению к поверхности прямого зуба, при сохранении геометрических параметров поверхности в дифференциальной окрестности расчетной точки зуба.

Список литературы

1. Патент № 2529943 на изобретение «Соосный редуктор», F16H 1/32, F04B 47/02, F04C2/107 / Ю. Г. Денисов, В. Н. Сызранцев, В. П. Вибе. Заявка № 2013117492/11, зарегистрировано в Государственном реестре изобретений Российской Федерации 10.10.2014, Бюл. 28, RU
2. Syzrantsev, V. & Kotlikova V. (2000) Mathematical and program provision of design of bevel gearing with small shaft angle. Proceedings of the International Conference on Gearing, Transmissions, and Mechanical Systems: 3-6, July, Nottingham Trent University, UK. - Pp.13-18.
3. Syzrantsev, V., Syzrantseva, K. & Pazyak, A. (2015). Method of Loading Capacity Calculation of Bevel Precessional Gear for Pipeline Valve Drives. Journal of Engineering and Sciences, Volume: 10, Issue: 8, Page No: pp. 243-246. DOI: 10.3923/jeasci.2015.243.246.
4. Syzrantsev, V., Denisov, J., Wiebe, V. & Pazyak, A. (2015) The Design and Production of Drives Based on Pan Precess Gear for Oil and Gas Machinery. ASME 2015 International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference. Volume 10: ASME 2015. Paper No. DETC2015-47096, pp. V010T11A057; 8 pages doi:10.1115/DETC2015-47096.
5. Litvin, F. L., & Gutman, Y. (1981). Methods of Synthesis and Analysis for Hypoid Gear Drives of Formate and Helixform. Parts 1, 2, and 3. ASME Journal of Mechanical Design, Vol.103, No 1, pp.83–113.
6. Сызранцев В. Н. Расчет геометрических характеристик полуобкатной прямозубой плоскоконической передачи / В. Н. Сызранцев, К. В. Сызранцева, А. А. Пазяк // Интеллектуальные системы в производстве. – 2015.– № 2 – С. 76-79.
7. Syzrantsev, V. N., Syzrantseva, K. V. & Pazyak, A. A. (2015) Calculating geometric parameters of the semi-rolled straight pan gear. Proceedings of the 6th International Symposium on Industrial Engineering – SIE 2015: 24-25, September, Belgrade, Serbia. - Pp.334-337.
8. Litvin, F. L. (1998) Development of Gear Technology and Theory of Gearing: NASA Reference Publication, 1406. – 124 p.
9. Лопато Г. А. Конические и гипоидные передачи с круговыми зубьями. Справочное пособие / Г. А. Лопато, Н. Ф. Кабатов, М. Г. Сегаль. – М.: Машиностроение, 1977. – 423 с.

Сведения об авторах

Пазяк Андрей Александрович, *аспирант кафедры «Машины и оборудование нефтяной и газовой промышленности», Тюменский индустриальный университет, г. Тюмень, тел. 8(3452)283015, e-mail: a.a.pazyak@gmail.com*

Сызранцев Владимир Николаевич, *д. т. н., профессор, заведующий кафедрой «Машины и оборудование нефтяной и газовой промышленности», Тюменский индустриальный университет, г. Тюмень, тел. 8(3452)283013,e-mail: v_syzrantsev@mail.ru*

Information about the authors

Pazyak A. A., *Postgraduate at the Department of «Machines and equipment of oil and gas industry», Industrial University of Tyumen, phone: 8(3452)283015, e-mail: a.a.pazyak@gmail.com*

Syzrantsev V. N., *Doctor of Technical Sciences, Full Professor, Head of the Department of «Machines and equipment of oil and gas industry», Industrial University of Tyumen, phone: 8(3452)283013, e-mail: v_syzrantsev@mail.ru*