

**ПЕРВАЯ ПРОЕКЦИЯ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ
В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ**
FIRST PROJECTION OF THE EQUATION OF MOTION IN THE CYLINDRICAL
COORDINATE SYSTEM

А. Г. Обухов, Р. Е. Волков

A. G. Obukhov, R. E. Volkov

Тюменский индустриальный университет, г. Тюмень

Тюменский государственный университет, г. Тюмень

*Ключевые слова: полная система уравнений Навье — Стокса; уравнение движения;
частные производные; цилиндрическая система координат*

*Key words: complete system of Navier-Stokes equations; equation of motion; partial derivatives;
a cylindrical coordinate system*

Модель сжимаемой сплошной среды, основанная на численном решении полной системы уравнений Навье — Стокса, используется для описания сложных нестационарных трехмерных течений вязкого, сжимаемого, теплопроводного газа [1–9]. Эта модель адекватно описывает физические процессы течений газа в восходящих закрученных потоках как при холодном продуве [4–7], так и при локальном нагреве [8, 9] под действием сил тяжести и Кориолиса. Полная система уравнений Навье — Стокса, записанная в безразмерных переменных, с учетом действия силы тяжести и Кориолиса в векторной форме имеет вид [2]

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_t + \vec{V} \cdot \nabla \rho + \rho \operatorname{div} \vec{V} = 0, \\ \vec{V}_t + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} + \frac{T}{\gamma \rho} \nabla \rho + \frac{1}{\gamma} \nabla T = \vec{g} - 2\vec{\Omega} \times \vec{V} + \frac{\mu_0}{\rho} \left[\frac{1}{4} \nabla (\operatorname{div} \vec{V}) + \frac{3}{4} \Delta \vec{V} \right], \\ T_t + \vec{V} \cdot \nabla T + (\gamma - 1) T \operatorname{div} \vec{V} = \frac{\kappa_0}{\rho} \Delta T + \frac{\mu_0 \gamma (\gamma - 1)}{2\rho} \left\{ [(u_x - v_y)^2 + \right. \\ \left. + (u_x - w_z)^2 + (v_y - w_z)^2] + \frac{3}{2} [(u_y + v_x)^2 + (u_z + w_x)^2 + (v_z + w_y)^2] \right\}. \end{array} \right. \quad (1)$$

В системе (1): t — время; x, y, z — декартовы координаты; ρ — плотность газа; μ_0 и κ_0 — постоянные значения безразмерных коэффициентов вязкости и теплопроводности; $\vec{V} = (u, v, w)$ — вектор скорости газа с проекциями на соответствующие декартовы оси; T — температура газа; $\vec{g} = (0, 0, -g)$ — вектор ускорения силы тяжести; $\gamma = 1,4$ — показатель политропы для воздуха; $-2\vec{\Omega} \times \vec{V} = (av - bw, -au, bu)$ — вектор ускорения силы Кориолиса, $a = 2\Omega \sin \psi$, $b = 2\Omega \cos \psi$, $\Omega = |\vec{\Omega}|$; $\vec{\Omega}$ — вектор угловой

скорости вращения Земли; ψ — широта точки O — начала декартовой системы координат $Oxyz$, вращающейся вместе с Землей.

В работах [8, 9] показано, что возникающие течения газа обладают осевой симметрией. Поэтому для численного решения полной системы уравнений Навье — Стокса при описании сложных течений газа при нагреве вертикальной области целесообразно использовать цилиндрическую систему координат. В данной работе описывается преобразование первой проекции векторного уравнения движения системы (1) с целью ее записи в цилиндрической системе координат.

Первая проекция уравнения движения в декартовой системе координат имеет вид

$$u_t + uu_x + vu_y + wu_z + \frac{T}{\gamma p} \rho_x + \frac{1}{\gamma} T_x = av - bw + \frac{\mu_0}{\rho} \left(u_{xx} + \frac{3}{4} u_{yy} + \frac{3}{4} u_{zz} + \frac{1}{4} v_{xy} + \frac{1}{4} w_{xz} \right). \quad (2)$$

В книге [10] в качестве компонент вектора скорости газа в цилиндрической системе координат r, ϕ, z вместо u, v введены соответственно ζ — радиальная и η — окружная компоненты по формулам

$$u = \zeta \cos \phi - \eta \sin \phi; \quad v = \zeta \sin \phi + \eta \cos \phi. \quad (3)$$

Частные производные первого порядка по пространственным переменным преобразовываются следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \cos \phi \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \phi}{r} \frac{\partial}{\partial \phi}; \quad \frac{\partial}{\partial y} = \sin \phi \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \phi}{r} \frac{\partial}{\partial \phi}. \quad (4)$$

Поскольку независимая переменная z при переходе к цилиндрическим координатам не меняется, то и производные по этой переменной также не меняются.

Частные производные второго порядка по пространственным переменным преобразуются по формулам:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} = & \left(\cos \phi \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \phi}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \left(\cos \phi \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \phi}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} \right) = \cos^2 \phi \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \\ & - \frac{2 \sin \phi \cos \phi}{r} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \phi} + \frac{\sin^2 \phi}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{\sin^2 \phi}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{2 \sin \phi \cos \phi}{r^2} \frac{\partial}{\partial \phi}; \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial y^2} = & \left(\sin \phi \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \phi}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \left(\sin \phi \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \phi}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} \right) = \sin^2 \phi \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \\ & + \frac{2 \sin \phi \cos \phi}{r} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \phi} + \frac{\cos^2 \phi}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{\cos^2 \phi}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{2 \sin \phi \cos \phi}{r^2} \frac{\partial}{\partial \phi}; \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} = & \left(\cos \phi \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \phi}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \left(\sin \phi \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \phi}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} \right) = \\ = & \sin \phi \cos \phi \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\cos^2 \phi - \sin^2 \phi}{r} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \phi} - \frac{\sin \phi \cos \phi}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} - \frac{\sin \phi \cos \phi}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\sin^2 \phi - \cos^2 \phi}{r^2} \frac{\partial}{\partial \phi}; \end{aligned} \quad (7)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial z} = \left(\cos \phi \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \phi}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \frac{\partial}{\partial z} = \cos \phi \frac{\partial^2}{\partial r \partial z} - \frac{\sin \phi}{r} \frac{\partial^2}{\partial \phi \partial z}. \quad (8)$$

С учетом соотношений (3)–(8) после приведения подобных и использования формул тригонометрии уравнение (2) в цилиндрической системе координат будет иметь вид

$$\begin{aligned} & \cos\phi\zeta_r - \sin\phi\eta_r + \zeta\cos\phi\zeta_r - \zeta\sin\phi\eta_r - \zeta\eta\frac{\sin\phi}{r} + \eta\frac{\cos\phi}{r}\zeta_\phi - \\ & - \eta^2\frac{\cos\phi}{r} - \eta\frac{\sin\phi}{r}\eta_\phi + w\cos\phi\zeta_z - w\sin\phi\eta_z + \frac{T}{\gamma\rho}\left(\cos\phi\rho_r - \frac{\sin\phi}{r}\rho_\phi\right) + \frac{1}{\gamma}\left(\cos\phi T_r - \frac{\sin\phi}{r}T_\phi\right) = \\ & = a\sin\phi\zeta + a\cos\phi\eta - bw + \frac{\mu_0}{\rho}\left(\cos\phi\zeta_{rr} - \frac{1}{4}\frac{\sin\phi}{r}\zeta_{r\phi} + \right. \\ & + \frac{3}{4}\frac{\cos\phi}{r^2}\zeta_{\phi\phi} + \frac{\cos\phi}{r}\zeta_r - \frac{7}{4}\frac{\sin\phi}{r^2}\zeta_\phi - \frac{\cos\phi}{r^2}\zeta - \frac{3}{4}\sin\phi\eta_{rr} + \\ & + \frac{1}{4}\frac{\cos\phi}{r}\eta_{r\phi} - \frac{\sin\phi}{r^2}\eta_{\phi\phi} - \frac{3}{4}\frac{\sin\phi}{r}\eta_r - \frac{7}{4}\frac{\cos\phi}{r^2}\eta_\phi + \frac{3}{4}\frac{\sin\phi}{r^2}\eta + \\ & \left. + \frac{3}{4}\cos\phi\zeta_{zz} - \frac{3}{4}\sin\phi\eta_{zz} + \frac{1}{4}\cos\phi w_{rz} - \frac{1}{4}\frac{\sin\phi}{r}w_{\phi z}\right). \end{aligned} \quad (9)$$

Таким образом, в данной работе проведены преобразования первой проекции уравнения движения полной системы уравнений Навье — Стокса. В результате выполненных преобразований эта проекция переписана в цилиндрической системе координат, использование которой более целесообразно для описания сложных течений газа с осевой симметрией.

Исследования поддержаны Министерством образования и науки РФ (проект № 3023).

Список литературы

1. Баутин С. П., Обухов А. Г. Математическое моделирование придонной части восходящего закрученного потока // Теплофизика высоких температур. – 2013. – Т. 51. – № 4. – С. 567-570.
2. Баутин С. П., Крутова И. Ю., Обухов А. Г., Баутин К. В. Разрушительные атмосферные вихри: теоремы, расчеты, эксперименты. – Новосибирск: Наука; Екатеринбург: Изд-во УрГУПС, 2013. – 215 с.
3. Bautin S. P., Obukhov A. G. Mathematical Simulation of the Near-Bottom Section of an Ascending Twisting Flow // High Temperature. – 2013. – V. 51. – No. 4. – P. 509-512.
4. Абдубакова Л. В., Обухов А. Г. Численный расчет скоростных характеристик трехмерного восходящего закрученного потока газа // Известия высших учебных заведений. Нефть и газ. – 2014. – № 3. – С. 88-94.
5. Обухов А. Г., Абдубакова Л. В. Численный расчет термодинамических характеристик трехмерного восходящего закрученного потока газа // Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математические науки. Информатика – 2014. – № 7. – С. 157-165.
6. Абдубакова Л. В., Обухов А. Г. Численный расчет термодинамических параметров закрученного потока газа, инициированного холодным вертикальным продувом // Известия вузов. Нефть и газ. – 2014. – № 5 – С. 57-62.
7. Абдубакова Л. В., Обухов А. Г. Расчет плотности, температуры и давления трехмерного восходящего закрученного потока газа при вертикальном продуве // Нефтегазовое дело. – 2014. – Том 12, № 3. – С. 116-122.
8. Обухов А. Г., Бараникова Д. Д. Особенности течения газа в начальной стадии формирования теплового восходящего закрученного потока // Известия вузов. Нефть и газ. – 2014. – № 6 – С. 65-70.
9. Баутин С. П., Крутова И. Ю., Обухов А. Г. Закрутка огненного вихря при учете сил тяжести и Кориолиса // Теплофизика высоких температур. – 2015. – Т. 53. – № 6. – С. 961-964.
10. Баутин С. П. Торнадо и сила Кориолиса. – Новосибирск: Наука. – 2008. – 96 с.

Сведения об авторах

Обухов Александр Геннадьевич, д. ф.-м. н., профессор кафедры «Бизнес-информатика и математика», Тюменский государственный университет, г. Тюмень тел. 89220014998, e-mail: aobukhov@tsogu.ru

Волков Роман Евстафьевич, аспирант кафедры «Алгебра и математическая логика», Тюменский государственный университет, г. Тюмень, тел. +79129211245, e-mail: email@rom anvolkov.ru

Information about the authors

Obukhov A. G., Doctor of Physics and Mathematics, professor of the chair «Business-informatics and mathematics», Industrial University of Tyumen, phone: 89220014998, e-mail: aobukhov@tsogu.ru

Volkov R. E., postgraduate of the chair «Algebra and mathematic logics», Tyumen State University, phone: +79129211245, e-mail: email@rom anvolkov.ru