УДК 621.833.2(31)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ МГНОВЕННОГО ПЕРЕДАТОЧНОГО ОТНОШЕНИЯ В ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ЗУБЧАТЫХ ПЕРЕДАЧАХ

DETERMINATION OF THE INSTANTANEOUS GEAR TRANSMISSION RATIO IN SPATIAL GEARS

В. Н. Сызранцев
V. N. Syzrantsev

Тюменский индустриальный университет, г. Тюмень

Ключевые слова: зубчатые передачи; функция передаточного отношения
Key words: gears; gear ratio function

В теории зубчатых зацеплений [1, 2, 3] определение мгновенного передаточного отношения зубчатой передачи является результатом решения обратной задачи, формулируемой следующим образом: задана схема зубчатого механизма и известны поверхности зубьев обеих подвижных звеньев, требуется определить закон движения в виде функции, связывающей движение подвижных звеньев. Эта же задача является основой различных математических моделей [1, 2, 3] синтеза геометрии пространственных зубчатых передач.

Рассмотрим пространственную зубчатую передачу, звенья которой шестерня (1) и колесо (2) вращаются вокруг неподвижных, в общем случае скрещивающихся осей. С шестерней и колесом жестко свяжем системы координат $S_1(x_1, y_1, z_1)$ и $S_2(x_2, y_2, z_2)$. Наиболее часто активные поверхности зубьев шестерни F_1 и зубьев колеса F_2 в результате формообразования представляют собой однопараметрические огибающие, соответственно, семейств производящих поверхностей P_1 и P_2. В этом случае радиусы-векторы $\bar{r}_i^{(i)}$, $i=1,2$ и орты нормали $\bar{m}_i^{(i)}$, $i=1,2$ поверхностей F_i, $i=1,2$ в системах координат $S_i(x_i, y_i, z_i)$ — верхний индекс у $\bar{r}_i^{(i)}$ и $\bar{m}_i^{(i)}$, описываются следующим образом [1, 2]:

$$\begin{aligned} &\bar{r}_1^{(1)} = \bar{r}_1^{(1)}(u_1, \vartheta_1, \phi_1); &&\bar{r}_2^{(2)} = \bar{r}_2^{(2)}(u_2, \vartheta_2, \phi_2); \\ &\bar{m}_1^{(1)} = \bar{m}_1^{(1)}(u_1, \vartheta_1, \phi_1); &&\bar{m}_2^{(2)} = \bar{m}_2^{(2)}(u_2, \vartheta_2, \phi_2); \\ &f_1(u_1, \vartheta_1, \phi_1) = 0; &&f_2(u_2, \vartheta_2, \phi_2) = 0\,. \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь $u_1, \vartheta_1, u_2, \vartheta_2$ — независимые параметры производящих поверхностей P_1 и P_2 при нарезании зубьев шестерни и колеса; ϕ_1 и ϕ_2 — углы поворота шестерни и колеса в станочном зацеплении; последними в выражениях (1) записаны уравнения зацепления при формообразовании зубьев шестерни и зубьев колеса.

В дальнейшем нам потребуется матричное представление зависимостей (1), имеющее вид

$$\begin{aligned} &\tilde{r}_1^{(1)} = \tilde{r}_1^{(1)}(u_1, \vartheta_1, \phi_1); &&\tilde{r}_2^{(2)} = \tilde{r}_2^{(2)}(u_2, \vartheta_2, \phi_2); \\ &\tilde{m}_1^{(1)} = \tilde{m}_1^{(1)}(u_1, \vartheta_1, \phi_1); &&\tilde{m}_2^{(2)} = \tilde{m}_2^{(2)}(u_2, \vartheta_2, \phi_2); \\ &f_1(u_1, \vartheta_1, \phi_1) = 0; &&f_2(u_2, \vartheta_2, \phi_2) = 0\,, \end{aligned} \tag{2}$$

где $z_i^{(i)}(u_i, \vartheta_i, \phi_i)$ $\tilde{r}_i^{(i)}(u_i, \vartheta_i, \phi_i) = \left\| x_i^{(i)}; y_i^{(i)}; z_i^{(i)}; 1 \right\|$ — матрицы-столбцы, составленные из проекций $x_i^{(i)}(u_i, \vartheta_i, \phi_i)$; $y_i^{(i)}(u_i, \vartheta_i, \phi_i)$; радиусов-векторов $\bar{r}_i^{(i)}$ на оси систем координат $S_i(x_i, y_i, z_i)$;

$\tilde{m}_i^{(i)}(u_i, \vartheta_i, \phi_i) = \left\| m_{xi}^{(i)}; m_{yi}^{(i)}; m_{zi}^{(i)}; 0 \right\|$ — матрицы-столбцы, составленные из проекций $m_{xi}^{(i)}(u_i, \vartheta_i, \phi_i)$; $m_{yi}^{(i)}(u_i, \vartheta_i, \phi_i)$ и $m_{zi}^{(i)}(u_i, \vartheta_i, \phi_i)$ радиусов-векторов $\bar{m}_i^{(i)}$ на оси систем координат $S_i(x_i, y_i, z_i)$.

Сообщим шестерне исследуемой зубчатой передачи поворот вокруг оси z_1 на угол ψ_1. Вследствие этого поворота, колесо повернется на угол ψ_2, величину которого определим из условия касания поверхностей F_1 и F_2. В точке касания поверхностей F_1 и F_2 проекции координат радиусов-векторов $\bar{r}_i^{(i)}$ и $\bar{m}_i^{(i)}$ совпадают, в результате имеем следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} &\tilde{r}_1^{(1)}(u_1, \vartheta_1, \phi_1) = \tilde{A}_{12}(\psi_1, \psi_2) \cdot \tilde{r}_2^{(2)}(u_2, \vartheta_2, \phi_2)\,; \\ &\tilde{m}_1^{(1)}(u_1, \vartheta_1, \phi_1) = \tilde{A}_{12}(\psi_1, \psi_2) \cdot \tilde{m}_2^{(2)}(u_2, \vartheta_2, \phi_2)\,; \\ &f_1(u_1, \vartheta_1, \phi_1) = 0; \qquad f_2(u_2, \vartheta_2, \phi_2) = 0\,, \end{aligned} \tag{3}$$

где $\tilde{A}_{12}(\psi_1, \psi_2)$ — матрица четвертого порядка [1]

$$\tilde{A}_{12}(\psi_1,\psi_2)=\begin{Vmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & d_{14} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} & d_{24} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & d_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}, \qquad (4)$$

описывающая переход из системы координат $S_2(x_2,y_2,z_2)$ в систему координат $S_1(x_1,y_1,z_1)$.

Раскрывая матричные выражения (3) с учетом (4), имеем следующую систему из восьми, в общем случае трансцендентных, уравнений:

$$\begin{aligned}
x_1^{(1)}(u_1,\vartheta_1,\phi_1) &= d_{11}(\psi_1,\psi_2)\cdot x_2^{(2)}(u_2,\vartheta_2,\phi_2)+d_{12}(\psi_1,\psi_2)\cdot y_2^{(2)}(u_2,\vartheta_2,\phi_2)+\\
&\quad +d_{13}(\psi_1,\psi_2)\cdot z_2^{(2)}(u_2,\vartheta_2,\phi_2)+d_{14}(\psi_1,\psi_2);\\
y_1^{(1)}(u_1,\vartheta_1,\phi_1) &= d_{21}(\psi_1,\psi_2)\cdot x_2^{(2)}(u_2,\vartheta_2,\phi_2)+d_{22}(\psi_1,\psi_2)\cdot y_2^{(2)}(u_2,\vartheta_2,\phi_2)+\\
&\quad +d_{23}(\psi_1,\psi_2)\cdot z_2^{(2)}(u_2,\vartheta_2,\phi_2)+d_{24}(\psi_1,\psi_2);\\
z_1^{(1)}(u_1,\vartheta_1,\phi_1) &= d_{31}(\psi_1,\psi_2)\cdot x_2^{(2)}(u_2,\vartheta_2,\phi_2)+d_{32}(\psi_1,\psi_2)\cdot y_2^{(2)}(u_2,\vartheta_2,\phi_2)+\\
&\quad +d_{33}(\psi_1,\psi_2)\cdot z_2^{(2)}(u_2,\vartheta_2,\phi_2)+d_{34}(\psi_1,\psi_2); \qquad (5)\\
m_{x1}^{(1)}(u_1,\vartheta_1,\phi_1) &= d_{11}(\psi_1,\psi_2)\cdot m_{x2}^{(2)}(u_2,\vartheta_2,\phi_2)+d_{12}(\psi_1,\psi_2)\cdot m_{y2}^{(2)}(u_2,\vartheta_2,\phi_2)+\\
&\quad +d_{13}(\psi_1,\psi_2)\cdot m_{z2}^{(2)}(u_2,\vartheta_2,\phi_2);\\
m_{y1}^{(1)}(u_1,\vartheta_1,\phi_1) &= d_{21}(\psi_1,\psi_2)\cdot m_{x2}^{(2)}(u_2,\vartheta_2,\phi_2)+d_{22}(\psi_1,\psi_2)\cdot m_{y2}^{(2)}(u_2,\vartheta_2,\phi_2)+\\
&\quad +d_{23}(\psi_1,\psi_2)\cdot m_{z2}^{(2)}(u_2,\vartheta_2,\phi_2);\\
m_{z1}^{(1)}(u_1,\vartheta_1,\phi_1) &= d_{31}(\psi_1,\psi_2)\cdot m_{x2}^{(2)}(u_2,\vartheta_2,\phi_2)+d_{32}(\psi_1,\psi_2)\cdot m_{y2}^{(2)}(u_2,\vartheta_2,\phi_2)+\\
&\quad +d_{33}(\psi_1,\psi_2)\cdot m_{z2}^{(2)}(u_2,\vartheta_2,\phi_2);\\
f_1(u_1,\vartheta_1,\phi_1) &= 0; \qquad\qquad f_2(u_2,\vartheta_2,\phi_2)=0.
\end{aligned}$$

В этой системе независимыми являются лишь семь уравнений, поскольку

$$\left[m_{xi}^{(i)}(u_i,\vartheta_i,\phi_i)\right]^2+\left[m_{yi}^{(i)}(u_i,\vartheta_i,\phi_i)\right]^2+\left[m_{zi}^{(i)}(u_i,\vartheta_i,\phi_i)\right]^2=1, \quad i=1,2. \qquad (6)$$

При фиксированном угле поворота шестерни $\psi_1=\psi_1^*=const$ система (5) содержит семь независимых уравнений с семью неизвестными u_1, ϑ_1, ϕ_1, u_2, ϑ_2, ϕ_2, ψ_2. В результате решения (любым численным способом) этой системы определяются значения параметров u_1^*, ϑ_1^*, ϕ_1^*, u_2^*, ϑ_2^*, ϕ_2^*, ψ_2^*, знание которых позволяет рассчитать в системах координат $S_1(x_1,y_1,z_1)$ и $S_2(x_2,y_2,z_2)$ проекции координат радиусов-векторов поверхностей F_1 и F_2 в точке их касания и проекции ортов нормалей к этим поверхностям в этой точке:

$$\begin{gathered}
x_1^*=x_1^{(1)}(u_1^*,\vartheta_1^*,\phi_1^*),\ y_1^*=y_1^{(1)}(u_1^*,\vartheta_1^*,\phi_1^*),\ z_1^*=z_1^{(1)}(u_1^*,\vartheta_1^*,\phi_1^*),\\
x_2^*=x_2^{(2)}(u_2^*,\vartheta_2^*,\phi_2^*),\ y_2^*=y_2^{(2)}(u_2^*,\vartheta_2^*,\phi_2^*),\ z_2^*=z_2^{(2)}(u_2^*,\vartheta_2^*,\phi_2^*), \qquad (7)\\
m_{x1}^*=m_{x1}^{(1)}(u_1^*,\vartheta_1^*,\phi_1^*),\ m_{y1}^*=m_{y1}^{(1)}(u_1^*,\vartheta_1^*,\phi_1^*),\ m_{z1}^*=m_{z1}^{(1)}(u_1^*,\vartheta_1^*,\phi_1^*),\\
m_{x2}^*=m_{x2}^{(2)}(u_2^*,\vartheta_2^*,\phi_2^*),\ m_{y2}^*=m_{y2}^{(2)}(u_2^*,\vartheta_2^*,\phi_2^*),\ m_{z2}^*=m_{z2}^{(2)}(u_2^*,\vartheta_2^*,\phi_2^*).
\end{gathered}$$

В зубчатых передачах с приближенным зацеплением (несопряженных) [2] при вращении шестерни с постоянной скоростью колесо на периоде работы одной пары зубьев будет вращаться неравномерно [3]. Если ψ_1 — угол поворота шестерни, а ψ_2 — угол поворота колеса, то мгновенное передаточное отношение передачи (i_{12}) равно [2]:

$$i_{12} = \frac{d\psi_2}{d\psi_1}. \qquad (8)$$

Поскольку для несопряженных передач аналитическое описание функции $\psi_2 = \psi_2(\psi_1)$ отсутствует, непосредственно воспользоваться формулой (8) для определения i_{12} не представляется возможным. Полученное выше численными методами решение (7) обратной задачи теории зацепления [1] позволяет рассчитать i_{12} по приближенной зависимости, используя значения ψ_1^* и ψ_2^* соответствующие j-ой и $j+1$ точкам активной действующей линии

$$i_{12} = (\psi_1^{*(i+1)} - \psi_1^{*(i)}) / (\psi_2^{*(i+1)} - \psi_2^{*(i)}). \qquad (9)$$

Другой подход приближенного определения величины i_{12} предложен в работе [3]. В ней функция $\psi_2 = \psi_2(\psi_1)$ представлена в виде ряда, конкретные значения членов которого описывают закон движения $\psi_2 = \psi_2(\psi_1)$ зависимостью, близкую к квадратичной.

Имея после решения системы уравнений (5) для точки контакта (касания) поверхностей F_1 и F_2 результаты (7), получим аналитическое выражение для расчета величины i_{12}. Воспользуемся обобщением теоремы Виллиса для случая непараллельных и непересекающихся осей вращения колес [4]. В этом случае контакт-нормаль пересекает две параллельные плоскости, проходящие через ось вращения шестерни и ось вращения колеса в точках, радиусы вращения которых обратно пропорциональны угловым скоростям. В результате основой для определения является зависимость следующего вида:

$$i_{12} = r_{n2} / r_{n1}, \qquad (10)$$

где r_{n1}, r_{n2} — радиусы-аналоги основных радиусов в зацеплении со скрещивающимися осями шестерни и колеса.

Обратимся к рисунку, где обозначено: O_1, O_2 — начала отсчета систем координат S_1 и S_2, орты осей z_1 и z_2 которых $\bar{k}_1$ и $\bar{k}_2$ определяют направления векторов $\bar{a}_1$ и $\bar{a}_2$; текущие радиусы $\bar{r}_1$ и $\bar{r}_2$ задают, каждый в своей системе координат, точку контакта M; векторы $\bar{q}_i = q_i \cdot \bar{m}_i$, $i = 1,2$ определяют расстояние от точки M вдоль контакт-нормали до точек ее пересечения с параллельными плоскостями Π_1, Π_2, проведенными через оси вращения z_2, z_1 колеса и шестерни перпендикулярно кратчайшему расстоянию B_1B_2 между ними; $\bar{c}_1$, $\bar{c}_2$ — орты межосевого перпендикуляра B_1B_2; $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$ — орты перпендикуляров к осям z_1 и z_2, расположенные в плоскостях Π_1 и Π_2; Σ — угол скрещивания осей z_1 и z_2.

Воспользовавшись построениями (см. рисунок), найдем

$$\bar{c}_1 = \bar{k}_1 \times \bar{k}_2; \quad \bar{c}_2 = \bar{k}_2 \times \bar{k}_1; \quad \bar{e}_1 = \bar{k}_2 - \bar{k}_1 \cdot \cos\Sigma; \quad \bar{e}_2 = \bar{k}_1 - \bar{k}_2 \cdot \cos\Sigma. \qquad (11)$$

Запишем два очевидных векторных равенства

$$\bar{r}_1 + \bar{q}_1 = \bar{a}_1 + \bar{r}_{n1}; \qquad \bar{r}_2 + \bar{q}_2 = \bar{a}_2 + \bar{r}_{n2}.$$

Умножая их скалярно, соответственно, один раз на $\bar{c}_i$, а затем на $\bar{e}_i$ ($i = 1,2$), определим

$$q_i = -\frac{\bar{c}_i \cdot \bar{r}_i}{\bar{c}_i \cdot \bar{m}_i}; \qquad r_{ni} = \bar{e}_i \cdot \bar{r}_i + \bar{e}_i \cdot \bar{m}_i \cdot q_i; \qquad i = 1,2. \qquad (12)$$

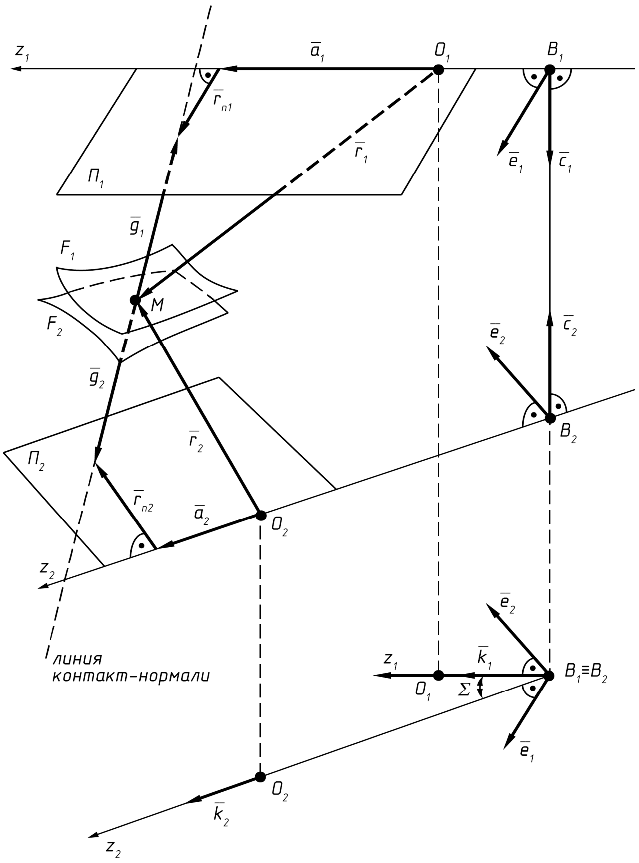
z_1
$\bar{a}_1$
O_1
B_1
$\bar{r}_{n1}$
$\bar{r}_1$
$\bar{e}_1$
$\bar{c}_1$
$П_1$
$\bar{g}_1$
F_1
M
F_2
$\bar{e}_2$
$\bar{c}_2$
$\bar{g}_2$
B_2
$\bar{r}_2$
$П_2$
$\bar{r}_{n2}$
$\bar{a}_2$
O_2
z_2
линия
контакт-нормали
$\bar{e}_2$
z_1
$\bar{k}_1$
$B_1 \equiv B_2$
O_1
Σ
$\bar{e}_1$
O_2
$\bar{k}_2$
z_2

Рисунок. ***Расчетная схема пространственной зубчатой передачи***

Объединяя эти зависимости, для расчета r_{ni} получим следующее выражение:

$$r_{ni} = \bar{e}_i \cdot \bar{r}_i - \bar{e}_i \cdot \bar{m}_i \cdot \frac{\bar{c}_i \cdot \bar{r}_i}{\bar{c}_i \cdot \bar{m}_i} . \tag{13}$$

При использовании формулы (13) необходимо вычислить в системе координат S_i, $i = 1,2$ скаляр r_{ni} и по выражению (10) рассчитать величину мгновенного передаточного отношения i_{12}.

Для зубчатых передач с пространственным зацеплением зубьев, раскрывая формулу (10) с учетом выражений (13) и построений (см. рисунок), получим конечные аналитические зависимости для расчета i_{12}.

Определим проекции векторов $\bar{r}_1$, $\bar{r}_2$, $\bar{m}_1$, $\bar{m}_2$, $\bar{k}_1$, $\bar{k}_2$ в системах координат S_1, S_2 (соответственно верхний индекс 1 или 2) с учетом зависимостей (7), представив векторы в виде матриц-столбцов:

$$\tilde{r}_1^1 = \begin{Vmatrix} x_1^*; \\ y_1^*; \\ z_1^*; \\ 1; \end{Vmatrix}; \ \tilde{r}_2^2 = \begin{Vmatrix} x_2^*; \\ y_2^*; \\ z_2^*; \\ 1; \end{Vmatrix}; \ \tilde{m}_1^1 = \begin{Vmatrix} m_{x1}^*; \\ m_{y1}^*; \\ m_{z1}^*; \\ 0; \end{Vmatrix}; \ \tilde{m}_2^2 = \begin{Vmatrix} m_{x2}^*; \\ m_{y2}^*; \\ m_{z2}^*; \\ 0; \end{Vmatrix}; \ \tilde{k}_1^1 = \begin{Vmatrix} 0; \\ 0; \\ 1; \\ 0; \end{Vmatrix}; \ \tilde{k}_2^2 = \begin{Vmatrix} 0; \\ 0; \\ 1; \\ 0; \end{Vmatrix}. \tag{14}$$

Для перехода из системы координат S_2 в систему координат S_1 воспользуемся матрицей четвертого порядка [1] $\tilde{A}_{12}$, а для перехода из системы координат S_1 в систему координат S_2 обратной матрицей $\tilde{A}_{21} = \tilde{A}_{12}^{-1}$, имеющих вид

$$\tilde{A}_{12} = \begin{Vmatrix} a_{11}; & a_{12}; & a_{13}; & a_{14}; \\ a_{21}; & a_{22}; & a_{23}; & a_{24}; \\ a_{31}; & a_{32}; & a_{33}; & a_{34}; \\ 0; & 0; & 0; & 1; \end{Vmatrix}; \quad \tilde{A}_{21} = \begin{Vmatrix} b_{11}; & b_{12}; & b_{13}; & b_{14}; \\ b_{21}; & b_{22}; & b_{23}; & b_{24}; \\ b_{31}; & b_{32}; & b_{33}; & b_{34}; \\ 0; & 0; & 0; & 1; \end{Vmatrix}. \tag{15}$$

Известно [1], что для $i = \overline{1,3}$ и $j = \overline{1,3}$ элементы $a_{i\,j}$ матрицы $\tilde{A}_{12}$ связаны с элементами $b_{i\,j}$ матрицы $\tilde{A}_{21}$ соотношениями:

$$a_{i\,j} = b_{j\,i}\,. \tag{16}$$

Определим проекции вектора $\bar{k}_2$ в системе координат S_1 на основе матричного выражения:

$$\tilde{k}_2^1 = \tilde{A}_{12} \cdot \tilde{k}_2^2 = \|a_{13}; \quad a_{23}; \quad a_{33}; \quad 0;\|,$$

после чего, воспользовавшись формулами (11), найдем проекции в этой же системе векторов $\bar{c}_1^1$ и $\bar{e}_1^1$:

$$\tilde{c}_1^1 = \|-a_{23}; \quad a_{13}; \quad 0; \quad 0;\|; \; \tilde{e}_1^1 = \|a_{13}; \quad a_{23}; \quad a_{33} - \cos\Sigma; \quad 0;\|. \tag{17}$$

Раскрывая, далее, скалярные произведения векторов $\bar{e}_1^1 \cdot \bar{r}_1^1$; $\bar{e}_1^1 \cdot \bar{m}_1^1$; $\bar{c}_1^1 \cdot \bar{r}_1^1$ и $\bar{c}_1^1 \cdot \bar{m}_1^1$, получим

$$\begin{gathered} \tilde{e}_1^1 \cdot \tilde{r}_1^1 = x_1^* \cdot a_{13} + y_1^* \cdot a_{23} + z_1^* \cdot (a_{33} - \cos\Sigma)\,; \\ \tilde{e}_1^1 \cdot \tilde{m}_1^1 = m_{x1}^* \cdot a_{13} + m_{y1}^* \cdot a_{23} + m_{z1}^* \cdot (a_{33} - \cos\Sigma)\,; \\ \tilde{c}_1^1 \cdot \tilde{r}_1^1 = -x_1^* \cdot a_{23} + y_1^* \cdot a_{13}\,; \qquad \tilde{c}_1^1 \cdot \tilde{m}_1^1 = -m_{x1}^* \cdot a_{23} + m_{y1}^* \cdot a_{13}\,. \end{gathered} \tag{18}$$

Подставляя эти выражения в формулу (13), определим величину r_{n1}:

$$\begin{gathered} r_{n1} = x_1^* \cdot a_{13} + y_1^* \cdot a_{23} + z_1^* \cdot (a_{33} - \cos\Sigma) - \\ - \frac{\left[m_{x1}^* \cdot a_{13} + m_{y1}^* \cdot a_{23} + m_{z1}^* \cdot (a_{33} - \cos\Sigma)\right] \cdot \left(x_1^* \cdot a_{23} - y_1^* \cdot a_{13}\right)}{m_{x1}^* \cdot a_{23} - m_{y1}^* \cdot a_{13}}. \end{gathered} \tag{19}$$

Аналогичным образом установим зависимость для r_{n2}, при получении которой все вектора должны быть записаны в системе координат S_2.

Проекции вектора $\bar{k}_1$ в этой системе определим с помощью матрицы (15) и учета связи (16):

$$\tilde{k}_1^2 = \tilde{A}_{21} \cdot \tilde{k}_2^1 = \|a_{31}; \quad a_{32}; \quad a_{33}; \quad 0;\|. \tag{20}$$

Используя зависимости (11), найдем проекции векторов $\bar{c}_2^2$ и $\bar{e}_2^2$:

$$\tilde{c}_2^2 = \|-a_{32}; \quad a_{31}; \quad 0; \quad 0;\|; \; \tilde{e}_2^2 = \|a_{31}; \quad a_{32}; \quad a_{33} - \cos\Sigma; \quad 0;\| \tag{21}$$

и определим скалярные произведения векторов $\bar{e}_2^2 \cdot \bar{r}_2^2$; $\bar{e}_2^2 \cdot \bar{m}_2^2$; $\bar{c}_2^2 \cdot \bar{r}_2^2$ и $\bar{c}_2^2 \cdot \bar{m}_2^2$:

$$\begin{gathered} \tilde{e}_2^2 \cdot \tilde{r}_2^2 = x_2^* \cdot a_{31} + y_2^* \cdot a_{32} + z_2^* \cdot (a_{33} - \cos\Sigma)\,; \\ \tilde{e}_2^2 \cdot \tilde{m}_2^2 = m_{x2}^* \cdot a_{31} + m_{y2}^* \cdot a_{32} + m_{z2}^* \cdot (a_{33} - \cos\Sigma)\,; \\ \tilde{c}_2^2 \cdot \tilde{r}_2^2 = -x_2^* \cdot a_{32} + y_2^* \cdot a_{31}\,; \qquad \tilde{c}_2^2 \cdot \tilde{m}_2^2 = -m_{x2}^* \cdot a_{32} + m_{y2}^* \cdot a_{31}\,. \end{gathered} \tag{23}$$

Входя с найденными выражениями в формулу (13), определим величину r_{n2}:

$$r_{n2} = x_2^* \cdot a_{31} + y_2^* \cdot a_{32} + z_2^* \cdot (a_{33} - \cos\Sigma) - \frac{\left[m_{x2}^* \cdot a_{31} + m_{y2}^* \cdot a_{32} + m_{z2}^* \cdot (a_{33} - \cos\Sigma) \right] \cdot \left(x_2^* \cdot a_{32} - y_2^* \cdot a_{31} \right)}{m_{x2}^* \cdot a_{32} - m_{y2}^* \cdot a_{31}}. \qquad (24)$$

Для получения зависимости по расчету мгновенного передаточного отношения i_{12} необходимо в формулу (10) подставить выражения (19) и (24), при этом учтем, что элемент a_{33} матрицы перехода $\tilde{A}_{12}$, определенный на основе построений (см. рисунок), всегда равен $a_{33} = \cos\Sigma$. В результате, опуская преобразования, окончательную формулу для расчета i_{12} представим в виде

$$i_{12} = \frac{\left(A_2 \cdot D_2 - B_2 \cdot C_2 \right) \cdot D_1}{\left(A_1 \cdot D_1 - B_1 \cdot C_1 \right) \cdot D_2}, \qquad (25)$$

где введены обозначения:

$$A_1 = x_1^* \cdot a_{13} + y_1^* \cdot a_{23}; \qquad A_2 = x_2^* \cdot a_{31} + y_2^* \cdot a_{32};$$

$$B_1 = m_{x1}^* \cdot a_{13} + m_{y1}^* \cdot a_{23}; \qquad B_2 = m_{x2}^* \cdot a_{31} + m_{y2}^* \cdot a_{32};$$

$$C_1 = x_1^* \cdot a_{23} - y_1^* \cdot a_{13}; \qquad C_2 = x_2^* \cdot a_{32} - y_2^* \cdot a_{31};$$

$$D_1 = m_{x1}^* \cdot a_{23} - m_{y1}^* \cdot a_{13}; \qquad D_2 = m_{x2}^* \cdot a_{32} - m_{y2}^* \cdot a_{31}.$$

Полученная зависимость (25) для зубчатых передач с пространственным зацеплением зубьев позволяет после решения обратной задачи для любой фиксированной фазы зацепления рассчитать мгновенное передаточное отношение в исследуемой передаче и оценить величину ее несопряженности с целью определения возможности компенсации отклонения передаточной функции за счет упругих деформаций зубьев под нагрузкой. Формула (25) справедлива для любых пространственных передач и может быть использована при решении задач анализа и синтеза различных вариантов цилиндрических передач с арочными зубьями [5], конических и гипоидных передач [2], плоскоконических передач с малым межосевым углом [6] и других.

Основные результаты работы

- Для зубчатых передач с пространственным зацеплением, формообразование поверхностей зубьев которых осуществляется в процессе однопараметрического огибания, рассмотрена методология решения обратной задачи зацепления.
- Получена конечная зависимость для точного расчета после решения обратной задачи зацепления пространственных передач с точечным касанием поверхностей зубьев величины мгновенного передаточного отношения. При решении задач синтеза геометрии пространственных передач данная зависимость целевую функцию математической модели синтеза позволяет строить не на основе приближенных оценок функции положения, а использовать результаты расчета по аналитическим выражениям.

Список литературы

1. Litvin, F. L. (1998) Development of Gear Technology and Theory of Gearing: *NASA Reference Publication*, 1406. – 124 p.
2. Лопато Г. А. Конические и гипоидные передачи с круговыми зубьями. Справочное пособие / Г. А. Лопато, Н. Ф. Кабатов, М. Г. Сегаль. – М.: Машиностроение, 1977. – 423 с.
3. Шевелева Г. И. Теория формообразования и контакта движущихся тел: Монография. – М.: Издательство «Станкин», 1999. – 494 с.
4. Коростелев Л. В. Мгновенное передаточное отношение в пространственных зацеплениях / Теория передач в машинах. – М.: Машиностроение, 1970. – С. 39-40.
5. Syzrantsev V., Syzrantseva K., Varshavsky M. Contact load and endurance of cylindrical gearing with arch-shaped teeth. ICMT'2001 Proceedings of the International Conference on Mechanical Transmissions: April 5-9, 2001, Chongqing, China: P. 425-431.
6. Syzrantsev V., Denisov J., Wiebe V., Pazyak A. The Design and Production of Drives Based on Pan Precess Gear for Oil and Gas Machinery. ASME 2015 International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference. Volume 10: ASME 2015. Paper No. DETC2015-47096, pp. V010T11A057; 8 pages doi:10.1115/DETC2015-47096/

Сведения об авторе

Сызранцев Владимир Николаевич, *д. т. н., профессор, заведующий кафедрой «Машины и оборудование нефтяной и газовой промышленности», Тюменский индустриальный университет, тел.:8(3452)283013, e-mail: v_syzrantsev@mail.ru*

Information about the author

Syzrantsev V. N., *Doctor of Engineering, professor, head of the Department of «Machinery and equipment of oil and gas industry», Industrial University of Tyumen, tel. 8(3452)283013,e-mail: v_syzrantsev@mail.ru*