УДК 539.3:624.075

КОЛЕБАНИЯ СОСТАВНЫХ СТЕРЖНЕЙ С ЖЕСТКО ЗАКРЕПЛЕННЫМИ КОНЦАМИ И С ПРОМЕЖУТОЧНЫМИ УПРУГОПОДАТЛИВЫМИ СОЕДИНЕНИЯМИ РАЗЛИЧНОГО ВИДА

VIBRATIONS OF RODS WITH A RIGIDLY FIXED ENDS AND INTERMEDIATE SEMIFLEXIBLE JOINTS OF DIFFERENT TYPE

О. Ю. Белова, Ю. Г. Сысоев
O. Yu. Belova, Yu. G. Sysoev

Тюменский государственный архитектурно-строительный университет, г. Тюмень
Тюменский государственный нефтегазовый университет, г. Тюмень

Ключевые слова: ***податливость упругих соединений различного вида; характеристическое уравнение***
Key words: ***flexibility of elastic joints of various type; characteristic equation***

Составные стержни являются элементами разнообразных конструкций, применяемых в нефтяном машиностроении, строительстве и обустройстве промыслов. Соединение отдельных участков составного стержня может осуществляться как с помощью идеальных шарниров, параллелограммных механизмов, так и с использованием упругих связей, жесткость которых на изгиб и сдвиг отличается от жесткостных параметров стержня. В частности, к схеме составного стержня с упругими соединениями может быть сведен расчет участка технологического трубопровода с сильфонными компенсаторами различного типа. Решение задач о колебаниях составных стержней с упругими шарнирами, упругоподатливыми связями сдвига и общего вида изложено в [1–3]. Для составных стержней с жестко закрепленными концами и с упругоподатливыми соединениями различного вида при их различном расположении по длине стержня решение данной задачи отсутствует, хотя и представляет несомненный практический интерес.

Определим частоту собственных колебаний составного стержня длиной L с упругим шарниром податливостью α_M и упругим соединением на сдвиг α_Q, расположенными на расстояниях l_1 и l_2 от начала координат (рисунок).

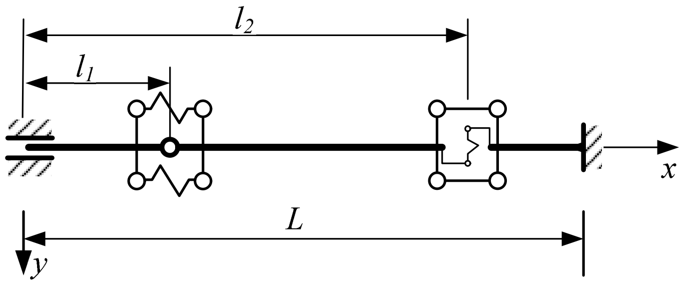

*Рисунок. **Составной стержень с упругоподатливыми соединениями различного вида***

Уравнение поперечных колебаний стержня постоянного сечения A имеет вид [1–4]

$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \frac{\rho A}{EJ} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0, \tag{1}$$

где y — прогиб стержня, ρ — плотность материала, E — модуль упругости, J — момент инерции.

Решение данного уравнения записывается следующим образом [4]:

$$y = \Phi \cdot sin\omega t, \tag{2}$$

где Φ — функция только одного переменного x, ω — частота собственных поперечных колебаний стержня. После подстановки (2) в уравнение (1) получаем

$$\Phi^{IV} - \lambda^4 \Phi = 0, \tag{3}$$

где

$$\lambda^4 = \rho \cdot A \frac{\omega^2}{EJ}. \tag{4}$$

Общее решение уравнения (3) содержит четыре произвольных постоянных интегрирования C_m:

$$\Phi(x) = \sum_{m=1}^{4} C_m \Phi_m(x), \tag{5}$$

где

$$\Phi_1 = sin\lambda x, \Phi_2 = cos\lambda x, \Phi_3 = sh\lambda x, \Phi_4 = ch\lambda x. \tag{6}$$

При наличии упругих соединений функция $\Phi(x)$ для каждого из участков составного стержня будет различной. При переходе через упругие соединения торцевые сечения стержней, примыкающих к ним, получают взаимные поперечные и угловое смещения

$$\Delta\theta(l_1) = \theta(l_1 + 0) - \theta(l_1), \ \Delta\Phi(l_2) = \Phi(l_2 + 0) - \Phi(l_2). \tag{7}$$

При $x \geq l_1$ угол поворота $\theta(x)$ и при $x \geq l_2$ прогиб $\Phi(x)$ получат добавки, равные

$$\theta(x) = \Delta\theta \cdot 1(x - l_1), \Phi(x) = \Delta\Phi \cdot 1(x - l_2). \tag{8}$$

где $1(x - l_1), 1(x - l_2)$ — единичные функции Хевисайда.

Дифференцируя последовательно данные выражения, находим

$$\Phi^{IV}(x) = \Delta\theta \cdot \delta''(x - l_1), \Phi^{IV}(x) = \Delta\Phi \cdot \delta'''(x - l_2), \tag{9}$$

где $\delta''(x - l_1), \delta'''(x - l_2)$ — вторая и третья производные дельта-функции.

Учитывая, что упругие соединения обладают податливостью при изгибе α_M и сдвиге α_Q, можно записать

$$\begin{aligned} \Delta\theta &= -\alpha_M \cdot M(l_1) = \alpha_M \cdot EJ \cdot \Phi''(l_1), \\ \Delta\Phi &= \alpha_Q \cdot Q(l_2) = -\alpha_Q \cdot EJ \cdot \Phi'''(l_2). \end{aligned} \tag{10}$$

Здесь $M(l_1), Q(l_2)$ — изгибающий момент и поперечная сила соответственно в сечениях $x = l_1, x = l_2$ стержня. Подставив данные выражения в (9), получим

$$\Phi^{IV}(x) = K_2 \cdot \delta''(x - l_1), \Phi^{IV}(x) = K_3 \cdot \delta'''(x - l_2), \tag{11}$$

где

$$K_2 = \Delta\theta = \alpha_M \cdot EJ \cdot \Phi''(l_1), K_3 = \Delta\Phi = -\alpha_Q \cdot EJ \cdot \Phi'''(l_2). \tag{12}$$

Дифференциальное уравнение (3), позволяющее учесть сдвиг и угол поворота (7), будет иметь вид

$$\Phi^{IV} - \lambda^4\Phi = K_2 \cdot \delta''(x - l_1) + K_3 \cdot \delta'''(x - l_2). \tag{13}$$

Интегрирование данного уравнения выполнено по методике, изложенной в [5, 6].

Окончательная формула для определения функции $\Phi(x)$ принимает вид

$$\Phi(x) = \sum_{m=1}^{4} A_m \Phi_m(x) + 1(x - l_1)\Delta\theta \cdot \Phi_\theta(x - l_1) + 1(x - l_2)\Delta\Phi \cdot \Phi_\Delta(x - l_2), \tag{14}$$

где A_m— произвольные постоянные интегрирования, определяемые из условий закрепления концов стержня,

$$\Delta\theta = \alpha_M EJ \cdot \lambda^2(-A_1 \sin\lambda l_1 - A_2 \cos\lambda l_1 + A_3 \mathrm{sh}\lambda l_1 + A_4 \mathrm{ch}\lambda l_1), \tag{15}$$

$$\Delta\Phi = -\alpha_Q EJ \cdot \lambda^3(-A_1 \cos\lambda l_2 + A_2 \sin\lambda l_2 + A_3 \mathrm{ch}\lambda l_2 + A_4 \mathrm{sh}\lambda l_2), \tag{16}$$

$$\Phi_\theta(x - l_1) = \frac{1}{2\lambda}[\sin\lambda(x - l_1) + \mathrm{sh}\lambda(x - l_1)], \tag{17}$$

$$\Phi_\Delta(x - l_2) = \frac{1}{2}[\cos\lambda(x - l_2) + \mathrm{ch}(x - l_2)]. \tag{18}$$

Построенное решение (14) носит общий характер, поскольку оно не связано с конкретным случаем закрепления концов стержня.

Для рассматриваемого стержня, левый конец которого оперт жестко, то есть при $x = 0$, выполняются следующие граничные условия:

$$\Phi(0) = \Phi'(0) = 0.$$

Раскрывая эти условия с помощью формулы (14), получим:

$$\left.\begin{matrix} A_2 + A_4 = 0, \\ A_1 + A_3 = 0 \end{matrix}\right\}, \qquad A_4 = -A_2;\ A_3 = -A_1.$$

Тогда смещения $\Delta\Phi$, $\Delta\theta$, определяемые зависимостями (15), (16), будут равны

$$\Delta\theta = -\alpha_M EJ \cdot \lambda^2[A_1(\sin\lambda l_1 + \mathrm{sh}\lambda l_1) + A_2(\cos\lambda l_1 + \mathrm{ch}\lambda l_1)], \tag{19}$$

$$\Delta\Phi = -\alpha_Q EJ\cdot\lambda^3[-A_1(\cos\lambda l_2 + ch\lambda l_2) + A_2(\sin\lambda l_2 - sh\lambda l_2)], \quad (20)$$

а формула (14) принимает вид

$$\Phi(x) = A_1(\sin\lambda x - sh\lambda x) + A_2(\cos\lambda x - ch\lambda x) + 1(x-l_1)\frac{1}{2}\alpha_M\cdot$$
$$\cdot EJ\cdot\lambda\{-A_1(\sin\lambda l_1 + sh\lambda l_1)\times[\sin\lambda(x-l_1) + sh\lambda(x-l_1)]\} +$$
$$+1(x-l_2)\frac{1}{2}\left(-\alpha_Q\cdot EJ\cdot l^3\right)A_1(\cos\lambda l_2 - ch\lambda l_2)[\cos\lambda(x-l_2) + ch\lambda(x-l_2)]. \quad (21)$$

Производная $\Phi'(x)$ вычисляется следующим образом:

$$\Phi'(x) = A_1\lambda(\cos\lambda x - ch\lambda x) + A_2\lambda(-\sin\lambda x - sh\lambda x) + 1(x-l_1)\frac{1}{2}\alpha_M\cdot EJ\cdot\lambda^2\times$$
$$\times\{(-A_1\sin\lambda l_1 + sh\lambda l_1)[\cos\lambda(x-l_1) + ch\lambda(x-l_1)]\} +$$
$$+1(x-l_2)\left(-\frac{1}{2}\alpha_Q\cdot EJ\cdot\lambda^4\right)\left(-A_1(\cos\lambda l_2 - ch\lambda l_2)\right)[-\sin\lambda(x-l_2) + sh\lambda(x-l_2)]. \quad (22)$$

Граничные условия на правом, жестко защемленном, конце стержня записываются так

$$\Phi = 0, \Phi' = 0 \text{ при } x = L = 3l,$$

что позволяет с использованием формул (21), (22) получить следующую систему алгебраических уравнений

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}\cdot A_1 + a_{12}\cdot A_2 = 0 \\ a_{21}\cdot A_1 + a_{22}\cdot A_2 = 0 \end{array}\right\}, \quad (23)$$

где

$$a_{11} = (\sin\lambda L - sh\lambda L) - \frac{1}{2}\alpha_M\cdot EJ\cdot\lambda\cdot\sin\lambda l_1[\sin\lambda(L-l_1) + sh\lambda(L-l_1)] +$$
$$+\frac{1}{2}\alpha_Q\cdot EJ\cdot\lambda^3\cdot\cos\lambda l_2[\cos\lambda(L-l_2) + ch\lambda(L-l_2)],$$
$$a_{12} = (\sin\lambda L - sh\lambda L) + \frac{1}{2}\alpha_M\cdot EJ\cdot\lambda\cdot sh\lambda l_1[\sin(L-l_1) + sh(L-l_1)] -$$
$$-\frac{1}{2}\alpha_Q\cdot EJ\cdot\lambda^3[ch\lambda l_2(L-l_2) + ch\lambda(L-l_2)],$$
$$a_{21} = \lambda(\cos\lambda L - ch\lambda L) - \frac{1}{2}\alpha_M\cdot EJ\cdot\lambda^2\cdot\sin\lambda l_1[\cos\lambda(L-l_1) + ch(L-l_1)] +$$
$$+\frac{1}{2}\alpha_Q\cdot EJ\cdot\lambda^4\cdot\cos\lambda l_2[-\sin\lambda(L-l_2) + sh\lambda(L-l_2)],$$
$$a_{22} = \lambda(\cos\lambda L - ch\lambda L) + \frac{1}{2}\alpha_M\cdot EJ\cdot\lambda^2\cdot sh\lambda l_1[\cos\lambda(L-l_1) + ch\lambda(L-l_1)] -$$
$$-\frac{1}{2}\alpha_Q\cdot EJ\cdot\lambda^4\cdot ch\lambda l_2[-sh\lambda(L-l_2) + sh\lambda(L-l_2)].$$

В рассматриваемой задаче при $\alpha_M = \alpha_Q = 0$ характеристическое уравнение принимает вид

$$\cos\lambda L\, ch\lambda L = 1.$$

Это выражение совпадает с полученным в [4] уравнением для сплошного стержня. Наименьший корень этого уравнения равен $\lambda L = 4{,}7302$.

Таким образом, достоверность разработанной методики исследования колебаний составных стержней с учетом податливости упругих соединений доказана.

Учитывая сложность коэффициентов $a_{11} \div a_{22}$, получить аналитическое выражение для наименьшего корня λL почти невозможно, поэтому целесообразно применять численные методы.

Для оценки влияния податливости соединений различного вида на частоту собственных колебаний составного стержня примем следующие числовые данные

$$\alpha_Q = \frac{L^3}{16EJ}, \quad \alpha_M = \frac{L}{2EJ}, \quad l_1 = l; \quad l_2 = 2l; \quad L = 3l.$$

Наименьший корень характеристического уравнения равен $\lambda L = 3{,}1934$.

Учитывая выражение (4) для λ, находим частоту основного тона

$$\omega = \frac{3{,}1934^2}{L^2}\sqrt{\frac{EJ}{\rho}} = \frac{10{,}1978}{L^2}\sqrt{\frac{EJ}{\rho A}}.$$

Таким образом, при данных податливостях упругих соединений частота собственных колебаний в 2,19 раза меньше, чем для сплошного стержня с аналогичным закреплением концов, поэтому расчет составных стержней при колебаниях необходимо выполнять с учетом реальной податливости упругих соединений.

Список литературы

1. Белова О. Ю., Сысоев Ю. Г. Колебания составных стержней с упругими шарнирами // Научно-технические проблемы Западно-Сибирского нефтегазового комплекса. Межвузовский сб. научн. тр. – Тюмень: ТюмГНГУ, 1997. – Т. 2. – С. 39-45.
2. Белова О. Ю., Сысоев Ю. Г. Колебания составных стержней с упругоподатливыми связями сдвига // Известия вузов. Нефть и газ. – 2005. – № 3. – С. 82-86.
3. Белова О. Ю., Сысоев Ю. Г. Колебания составных стержней с упругоподатливыми связями общего вида // Известия вузов. Нефть и газ. – 2005. – № 6. – С. 87-91.
4. Феодосьев В. И. Сопротивление материалов. – М.: Физматгиз, 1963. – 540 с.
5. Белова О. Ю., Сысоев Ю. Г. Колебания составных стержней с упругоподатливыми соединениями различного ида // Известия вузов. Нефть и газ. – 2013. – № 4. – С. 119-122.
6. Сысоев Ю. Г., Белова О. Ю. Решение дифференциальных уравнений составных конструкций с упругоподатливыми связями // Известия вузов. Нефть и газ. – 1999. – № 4. – С. 109-116.

Сведения об авторах

Белова Ольга Юрьевна, *к. т. н., доцент кафедры «Строительная механика», Тюменский государственный архитектурно-строительный университет, г. Тюмень, тел.8(3452)432337*

Сысоев Юрий Георгиевич, *д. т. н., профессор кафедры «Прикладная механика», Тюменский государственный нефтегазовый университет, г. Тюмень, тел. 8(3452)201041*

Information about the authors

Belova O. Yu.*, Candidate of Science in Engineering, associate professor of the chair «Construction mechanics», Tyumen State Architecture and Building University, phone: 8(3452)432337*

Sysoev Yu. G.*, Doctor of Engineering, professor of the chair «Applied mechanics», Tyumen State Oil and Gas University, phone: 8(3452)201041*