

ЧИСЛЕННЫЙ РАСЧЕТ СКОРОСТЕЙ КОНВЕКТИВНОГО ТЕЧЕНИЯ ГАЗА ПРИ КОЛЬЦЕОБРАЗНОЙ СХЕМЕ НАГРЕВА

NUMERICAL CALCULATION OF CONVECTIVE FLOW OF GAS AT CIRCULAR-TYPE SCHEME OF HEATING

Е. М. Сорокина, А. Г. Обухов

E. M. Sorokina, A. G. Obukhov

Тюменское высшее военное-инженерное командное училище, г. Тюмень

Тюменский государственный нефтегазовый университет, г. Тюмень

Ключевые слова: *система уравнений газовой динамики; полная система уравнений Навье — Стокса*

Key words: *system of equations of gas dynamics; a complete system of Navier — Stokes equations*

При описании сложных течений газа используется модель сжимаемой сплошной среды, основанная на решении полной системы уравнений Навье — Стокса [1]. Эта модель адекватно описывает физические процессы в указанных течениях, поскольку учитывает диссипативные свойства вязкости и теплопроводности.

Такие исследования, проведенные в последние годы [2–6], были посвящены изучению течения газа в разных частях восходящего закрученного потока. Рассматривались стационарные и нестационарные течения в придонной и вертикальной частях восходящих закрученных потоков. С работ [7–10] начался новый цикл исследований сложных течений газа, предполагающих математическое моделирование и численные расчеты трехмерных нестационарных течений сжимаемого вязкого теплопроводного газа в целом. Исследовались сложные течения газа в восходящих закрученных потоках, инициированных нагревом подстилающей поверхности и вертикальным продувом при учете действия сил тяжести и Кориолиса. Кроме того, сделана попытка в этой же модели без учета действия силы Кориолиса описать возникающее при нагреве подстилающей поверхности конвективное течение вязкого теплопроводного газа [11, 12]. Причем нагрев осуществлялся в центре нижней грани расчетной области в виде круга конечного радиуса.

Целью данной работы является математическое моделирование и численный расчет скоростных характеристик в начальной стадии формирования трехмерного нестационарного конвективного течения газа, вызванного локальным кольцеобразным прогревом нижней поверхности расчетной области. Полная система уравнений Навье — Стокса в безразмерных переменных с учетом действия силы тяжести в векторной форме имеет следующий вид [13]:

$$\begin{aligned} & \pi_t + V \cdot \nabla \pi + \pi \operatorname{div} V = 0, \\ & T_t + V \cdot \nabla T + \frac{1}{\pi} \nabla \pi \cdot \nabla T = \frac{\mu_0}{\pi} \operatorname{div} \nabla T + \frac{K_0}{4\pi} \nabla^2 T, \\ & T_t + V \cdot \nabla T + (\psi - 1) T \operatorname{div} V = \\ & \quad \frac{K_0}{\pi} \nabla^2 T + \frac{\mu_0}{2} \frac{\psi(\psi - 1)}{\pi} \left(\frac{u_x^2 + v_y^2}{\lambda} + \right. \\ & \quad \left. + \frac{(u_x - w_z)^2 + (v_y - w_z)^2}{\lambda} + \right. \\ & \quad \left. + \frac{3}{2} \frac{(u_y + v_x)^2 + (u_z + w_x)^2 + (v_z + w_y)^2}{\lambda} \right), \end{aligned} \quad (1)$$

где значения безразмерных положительных констант μ_0 и K_0 — коэффициентов вязкости и теплопроводности следующие: $\mu_0 = 0,001$, $K_0 = 1,458333\mu_0$.

Эта система в дифференциальной форме передает законы сохранения массы, им-

пульса и энергии в движущейся сплошной среде, а также учитывает влияние силы тяжести [1].

В системе (1): t — время; x, y, z — декартовы координаты; π — плотность газа; $V(u, v, w)$ — вектор скорости газа с проекциями на соответствующие декартовы оси; T — температура газа; $g(0, 0, g)$ — вектор ускорения силы тяжести, а $g = \text{const} > 0$ — показатель политропы для воздуха $\psi = 1,4$.

В подробной записи полная система уравнений Навье — Стокса (1) имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}
 & \pi_t + u\pi_x + v\pi_y + w\pi_z + \frac{\pi}{T}(u_x + v_y + w_z) = 0, \\
 & \mu_0 \left(\frac{3}{4}u_{xx} + \frac{3}{4}u_{yy} + \frac{3}{4}u_{zz} + \frac{1}{4}v_{xy} + \frac{1}{4}w_{xz} \right) + \\
 & \frac{\pi}{T} \left(u^2 + v^2 + w^2 + \frac{1}{2}T \right) = \frac{\pi}{T} \left(u^2 + v^2 + w^2 + \frac{1}{2}T \right) + \\
 & \mu_0 \left(\frac{3}{4}v_{xx} + \frac{3}{4}v_{yy} + \frac{3}{4}v_{zz} + \frac{1}{4}u_{xy} + \frac{1}{4}w_{yz} \right) + \\
 & \frac{\pi}{T} \left(v^2 + w^2 + \frac{1}{2}T \right) = \frac{\pi}{T} \left(v^2 + w^2 + \frac{1}{2}T \right) + \\
 & \mu_0 \left(\frac{3}{4}w_{xx} + \frac{3}{4}w_{yy} + \frac{3}{4}w_{zz} + \frac{1}{4}u_{xz} + \frac{1}{4}v_{yz} \right) + \\
 & \frac{\pi}{T} \left(w^2 + \frac{1}{2}T \right) = \frac{\pi}{T} \left(w^2 + \frac{1}{2}T \right) + \\
 & T_t + uT_x + vT_y + wT_z + (\psi - 1)T(u_x + v_y + w_z) = \\
 & \frac{\pi}{T} (T_{xx} + T_{yy} + T_{zz}) + \\
 & \mu_0 \left(\frac{3}{4}u_{xx} + \frac{3}{4}u_{yy} + \frac{3}{4}u_{zz} + \frac{1}{4}v_{xy} + \frac{1}{4}w_{xz} \right) + \\
 & \frac{\pi}{T} \left(u^2 + v^2 + w^2 + \frac{1}{2}T \right) = \frac{\pi}{T} \left(u^2 + v^2 + w^2 + \frac{1}{2}T \right) + \\
 & \mu_0 \left(\frac{3}{4}v_{xx} + \frac{3}{4}v_{yy} + \frac{3}{4}v_{zz} + \frac{1}{4}u_{xy} + \frac{1}{4}w_{yz} \right) + \\
 & \frac{\pi}{T} \left(v^2 + w^2 + \frac{1}{2}T \right) = \frac{\pi}{T} \left(v^2 + w^2 + \frac{1}{2}T \right) + \\
 & \mu_0 \left(\frac{3}{4}w_{xx} + \frac{3}{4}w_{yy} + \frac{3}{4}w_{zz} + \frac{1}{4}u_{xz} + \frac{1}{4}v_{yz} \right) + \\
 & \frac{\pi}{T} \left(w^2 + \frac{1}{2}T \right) = \frac{\pi}{T} \left(w^2 + \frac{1}{2}T \right) +
 \end{aligned} \tag{2}$$

Разностная аппроксимация начальных и краевых условий. Набор функций

$$u = 0, \quad v = 0, \quad w = 0, \tag{3}$$

$$T_0(x, y, z) = k \frac{lx_{00}}{T_{00}}, \quad l = 0,0065 \frac{K}{m}, \quad x_{00} = 10, \quad T_{00} = 288^\circ K \tag{4}$$

и

$$\pi_0(x, y, z) = \frac{\pi}{T} \left(u^2 + v^2 + w^2 + \frac{1}{2}T \right) = \frac{\pi}{T} \left(u^2 + v^2 + w^2 + \frac{1}{2}T \right) + \frac{g}{k} \tag{5}$$

задают точное решение [14] системы (1) и используются в качестве начальных условий

при численном решении полной системы уравнений Навье — Стокса.

Расчетная область представляет собой куб с длинами сторон $x^0 = 1$, $y^0 = 1$ и $z^0 = 1$ вдоль осей Ox , Oy и Oz соответственно.

Для плотности на всех шести гранях куба $x = 0$, $x = x^0$, $y = 0$, $y = y^0$, $z = 0$, $z = z^0$ ставится «условие симметрии» [15]. Это означает, что на границе предпола-

ется равенство нулю производной функции плотности газа в направлении нормали к граничной поверхности.

Для температуры на пяти гранях куба $x = 0, x = x^0, y = 0, y = y^0, z = z^0$ задаются условия теплоизоляции («условие симметрии») [15].

На нижней плоскости $z = 0$ значения температуры в кольце между концентрическими окружностями с безразмерными значениями радиусов $r = 0,1$ и $r = 0,3$ заданы в виде функции

$$T_0(x, y) = M \left(\frac{1}{7} e^{10r} \cos \frac{2\pi}{15} \sqrt{\frac{(x-0,5)^2 + (y-0,5)^2}{9}} \right), \quad (6)$$

моделирующей кольцеобразный локальный нагрев нижней грани расчетного куба. Множитель M в формуле (6) равен превышению максимального безразмерного значения температуры над масштабным единичным значением и составляет в данной работе 0,125 (размерное значение 36 °K).

Краевые условия для компонент вектора скорости газа на всех шести гранях берутся соответствующими «условиям непротекания» для нормальной к граничной поверхности составляющей вектора скорости (равенство нулю нормальной составляющей к этой поверхности вектора скорости газа) и «условиям симметрии» для двух других компонент вектора скорости течения [15]. Данные краевые условия фактически означают рассмотрение конвективного течения вязкого сжимаемого теплопроводного газа в непроницаемой и теплоизолированной кубической емкости.

Расчетная область заполняется трехмерной сеткой узлов пересечения трех семейств плоскостей $y = y_j, z = z_k, x = x_i$, где $y_j = y^0/L, z_k = z^0/M, x_i = x^0/N$, $j = \overline{0, M}, k = \overline{0, N}, i = \overline{0, N}$.

$\Delta y = y^0/M, \Delta z = z^0/N, \Delta x = x^0/N$ — разностные шаги по трем пространственным переменным.

Зная в начальный момент времени $t = 0$ во всех точках куба все искомые функции, с помощью явной разностной схемы вычисляются значения искомых функций во внутренних точках куба, во внутренних точках каждой из граней, ребер и вершин.

Результаты расчетов конвективного потока газа. Расчеты проводились при следующих входных параметрах: масштабные размерные значения плотности, скорости, расстояния и времени равны соответственно

$$\rho_{00} = 1,2928 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}, u_{00} = \frac{333 \text{ м}}{\text{с}}, x_{00} = 10 \text{ м}, t_{00} = \frac{x_{00}}{u_{00}} = 0,03 \text{ с}.$$

Разностные шаги по трем пространственным переменным $\Delta x = \Delta y = 0,01, \Delta z = 0,1$ а шаг по времени $\Delta t = 0,001$.

На рис. 1–4 представлены графики x -ой компоненты скорости газа для фиксированной высоты $z = 0,5$ (размерное значение 5 м) для четырех фиксированных расчетных шагов по времени. На осях координат x, y отложены номера узлов расчетной сетки.

Из приведенных рисунков видно, что поведение первой компоненты скорости газа за рассчитанное время можно характеризовать следующим образом. В самом начале прогрева, соответствующем 50 расчетному шагу по времени (рис. 1), периферийные значения скорости практически равны нулю. В центре расчетной области скорости малы по значению, противоположны по знаку и имеют четко выраженную кольцевую структуру, соответствующую кольцевой схеме нагрева нижней плоскости. Положительные и отрицательные значения первой компоненты скорости, находящиеся за пре-

делами кольцевого нагрева, описывают расходящееся от центра вдоль радиуса движение газа. Разные по знаку скорости, но находящиеся внутри кольца нагрева, соответствуют сходящемуся вдоль радиуса к центру потоку газа. Максимальные безразмерные значения модулей скоростей для данного расчетного момента времени составляют $2 \cdot 10^{10}$ (размерное значение $6,66 \cdot 10^8$ м/с). Для 300 расчетного шага по времени (рис. 2) область, соответствующая движению газа от центра, расширяется, а область

движения газа к центру сужается. При этом максимальные значения модулей скорости увеличиваются до $2 \cdot 10^{-5}$ (размерное значение 0,0067 м/с).

Такие изменения первой компоненты скорости течения газа согласуются с нарастанием температуры кольцеобразного нагрева.

Значения скорости на плоскостях $x = 0$ и $x = 1$ равны нулю согласно «условию непротекания», установленному для этих граней расчетной области. Значения скоростей на гранях $y = 0$ и $y = 1$ начинают заметно меняться.

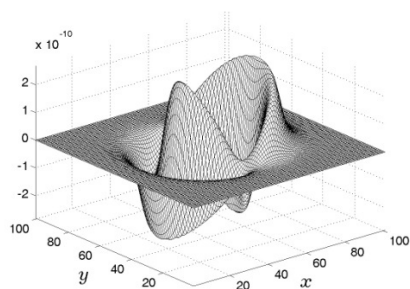


Рис. 1. Первая компонента скорости на 50 шаге по времени

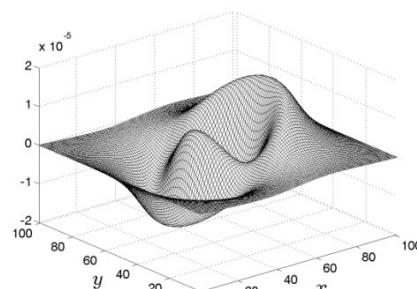


Рис. 2. Первая компонента скорости на 300 шаге по времени

Для 3 000 расчетного шага по времени (рис. 3) область, соответствующая движению газа от центра, сместилась еще ближе к боковым граням, а область движения газа к центру практически исчезла. При этом максимальные значения модулей скорости увеличиваются до 0,01 (размерное значение 3,33 м/с).

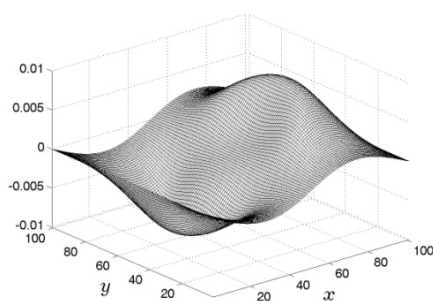


Рис. 3. Первая компонента скорости на 3 000 шаге по времени

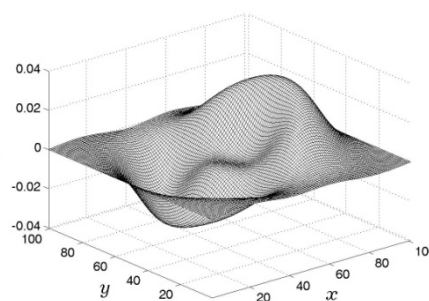


Рис. 4. Первая компонента скорости на 10 000 шаге по времени

На 10 000 расчетном шаге по времени (рис. 4) область, соответствующая движению газа от центра практически дошла до боковых граней. Максимальные значения модулей скорости увеличились до 0,04 (размерное значение 13,32 м/с).

Значения скорости на плоскостях $x = 0$ и $x = 1$ по-прежнему равны нулю, а значения скоростей на гранях $y = 0$ и $y = 1$ изменяются по синусоидальному закону.

Значения скорости на плоскостях $x = 0$ и $x = 1$ равны нулю, а значения скоростей на гранях $y = 0$ и $y = 1$ волнообразно изменяются.

Расчеты показали, что изменение x -ой компоненты скорости газа имеет ярко выраженный нестационарный характер. Кроме того, в начальные моменты времени общая структура скоростей имеет центральную симметрию, а с течением времени она изменяется и приобретает прямоугольный характер.

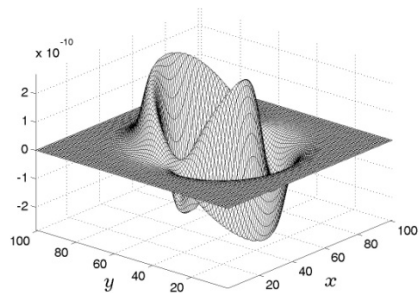


Рис. 5. Вторая компонента скорости на 50 шаге по времени

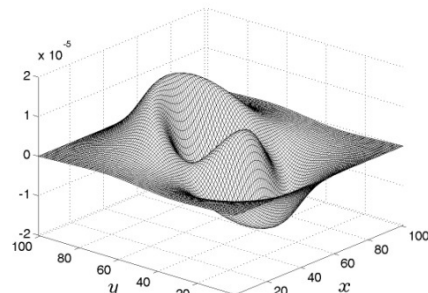


Рис. 6. Вторая компонента скорости на 300 шаге по времени

На рис. 5–8 представлены графики y -ой компоненты скорости газа для фиксированной высоты $z = 0,5$ (размерное значение 5 м) для четырех фиксированных расчетных шагов по времени. На осях координат x, y отложены номера узлов расчетной сетки.

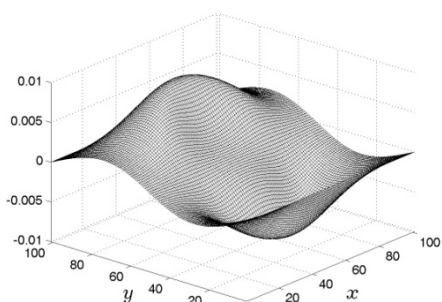


Рис. 7. Вторая компонента скорости на 3 000 шаге по времени

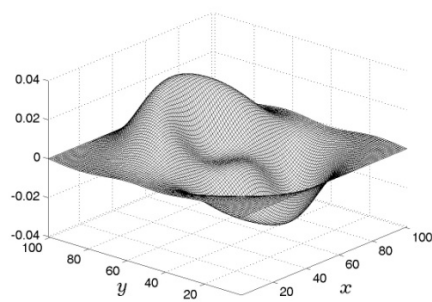


Рис. 8. Вторая компонента скорости на 10 000 шаге по времени

Характер поведения y -ой компоненты скорости газа полностью аналогичен поведению x -ой компоненты скорости газа, с той лишь разницей, что она описывает движение газа вдоль оси y . В результате, несмотря на принятую в расчетах прямоугольную систему координат, поведение первых двух компонент скоростей таково, что оно соответствует движению газа для принятой изначально центральной кольцевой схеме нагрева подстилающей поверхности. Нестационарный конвективный поток в условиях действия силы тяжести при такой схеме нагрева сохраняет центральную симметрию.

Это хорошо видно на приведенных далее рисунках 9–12 с изображениями поверхностей z -ой компоненты скорости газа на той же высоте $z = 0,5$ (размерное значение 5 м) для четырех фиксированных расчетных шагов по времени. В начальные моменты времени нагрева (рис. 9) вертикальная составляющая скорости газа имеет кольцевой характер с очень малыми значениями $5 \cdot 10^{-8}$ (размерное $1,67 \cdot 10^{-5}$ м/с) и фоновыми значениями, равными нулю.

На 300 расчетном шаге по времени (рис. 10) фоновые значения вертикальной скорости по-прежнему близки к нулю, а кольцеобразная структура размывается в пространстве. При этом безразмерные значения вертикальной скорости достигают 10^{-3} (размерное 0,333 м/с). С 2 000 расчетного шага по времени фоновые значения вертикальной компоненты скорости становятся отрицательными и на 3000 расчетном шаге (рис. 11) становятся равными $-0,015$ (размерное 5 м/с).

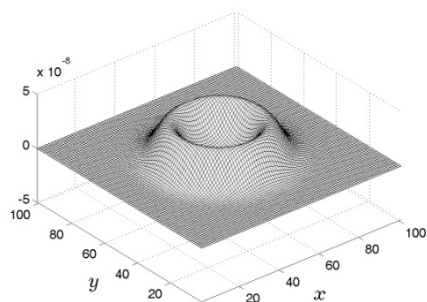


Рис. 9. Третья компонента скорости на 50 шаге по времени

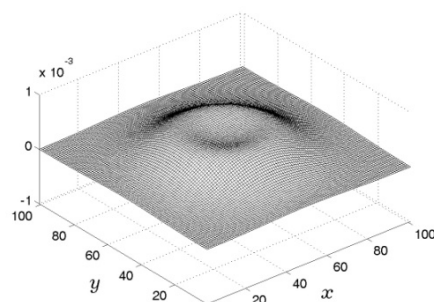


Рис. 10. Третья компонента скорости на 300 шаге по времени

В центре расчетной области значения вертикальной скорости также отрицательные, но имеют куполообразную форму со значениями, близкими к нулю. Такое пространственное распределение значений вертикальной составляющей скорости говорит о том, что движение газа с 2 000 расчетного шага по времени направлено вертикально вниз, и скорость этого движения больше на периферийных участках и меньше в центральной части расчетной области.

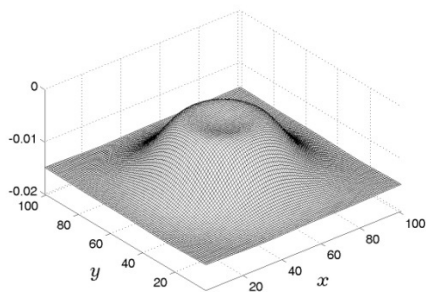


Рис. 11. Третья компонента скорости на 3 000 шаге по времени

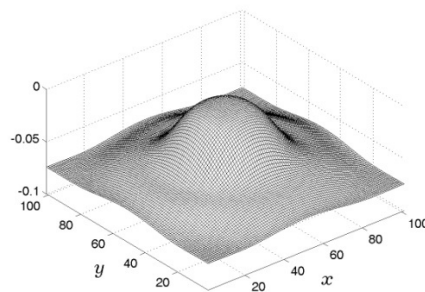


Рис. 12. Третья компонента скорости на 10 000 шаге по времени

Далее, с течением времени, происходит дальнейший рост абсолютного значения вертикальной составляющей скорости газа вплоть до значений 0,07 (размерное 23,3 м/с) на периферии и практически нулевых значениях в центре расчетной области на 10 000 расчетном шаге по времени (рис. 12).

Таким образом, основным результатом данной работы является то, что численное решение в нестационарном случае полной системы уравнений Навье — Стокса с корректно поставленными начальными и краевыми условиями позволяет математически моделировать и исследовать конвективное течение газа, вызванное кольцевым нагревом придонной части. Ясно, что полученные в данной работе результаты являются лишь началом более детального и подробного исследования подобных течений газа. Однако уже сейчас понятно, что предложенная вычислительная схема работает корректно, начальные и краевые условия адекватны исследуемым течениям газа, возникающим в результате кольцевого нагрева, и результаты расчетов получаются понятными с физической точки зрения. Дальнейшая работа в этом направлении может быть связана с продолжением расчета конвективных течений газа для больших расчетных шагов по времени.

Список литературы

1. Баутин С. П. Представление решений системы уравнений Навье — Стокса в окрестности контактной характеристики // Прикладная математика и механика. — 1987. — Т. 51, вып. 4. — С. 574-584.

2. Баутин С. П., Обухов А. Г. Математическое моделирование разрушительных атмосферных вихрей. – Новосибирск: Наука, 2012. – 152 с.
3. Баутин С. П., Обухов А. Г. Математическое моделирование и численный расчет течений в придонной части тропического циклона // Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математические науки. Информатика. – 2012. – № 4. – С. 175–183.
4. Обухов А. Г. Математическое моделирование и численные расчеты течений в придонной части торнадо // Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математические науки. Информатика. – 2012. – № 4. – С. 183–189.
5. Баутин С. П., Обухов А. Г. Математическое моделирование придонной части восходящего закрученного потока // Теплофизика высоких температур. – 2013. – Т. 51. – № 4. – С. 567–570.
6. Баутин С. П., Крутова И. Ю., Обухов А. Г., Баутин К. В. Разрушительные атмосферные вихри: теоремы, расчеты, эксперименты. – Новосибирск: Наука; Екатеринбург: Изд-во УрГУПС, 2013. – 215 с.
7. Абдубакова Л. В., Обухов А. Г. Численный расчет скоростных характеристик трехмерного восходящего закрученного потока газа // Известия высших учебных заведений. Нефть и газ. – 2014. – № 3. – С. 88–94.
8. Обухов А. Г., Абдубакова Л. В. Численный расчет термодинамических характеристик трехмерного восходящего закрученного потока газа // Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математические науки. Информатика. – 2014. – № 7. – С. 157–165.
9. Абдубакова Л. В., Обухов А. Г. Численный расчет термодинамических параметров закрученного потока газа, иницированного холодным вертикальным продувом // Известия вузов. Нефть и газ. – 2014. – № 5 – С. 57–62.
10. Обухов А. Г., Бараникова Д. Д. Особенности течения газа в начальной стадии формирования теплового восходящего закрученного потока // Известия вузов. Нефть и газ. – 2014. – № 6 – С. 65–70.
11. Обухов А. Г., Сорокина Е. М. Математическое моделирование и численный расчет трехмерного конвективного течения газа // Известия вузов. Нефть и газ. – 2013. – № 6. – С. 57–63.
12. Сорокина Е. М., Обухов А. Г. Численное исследование температурной зависимости скоростных характеристик нестационарного конвективного течения газа // Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математические науки. Информатика. – 2014. – № 7. – С. 147–156.
13. Баутин С. П. Характеристическая задача Коши и ее приложения в газовой динамике. – Новосибирск: Наука, 2009. – 368 с.
14. Баутин С. П., Обухов А. Г. Одно точное стационарное решение системы уравнений газовой динамики // Известия вузов. Нефть и газ. – 2013. – № 4. – С. 81–86.
15. Баутин С. П., Обухов А. Г. Об одном виде краевых условий при расчете трехмерных нестационарных течений сжимаемого вязкого теплопроводного газа // Известия вузов. Нефть и газ. – 2013. – № 5. – С. 55–63.

Сведения об авторах

Сорокина Елена Михайловна, старший преподаватель, Тюменское высшее военно-инженерное командное училище, г. Тюмень, тел.: 89058221749, e-mail: cemaia@mail.ru

Обухов Александр Геннадьевич, д. ф.-м. н., профессор, Тюменский государственный нефтегазовый университет, г. Тюмень тел. 89220014998, e-mail: aobukhov@tsogu.ru

Information about the authors

Sorokina E. M., senior teacher of the Tyumen Higher Education Military Engineering officers college, phone: 89058221749, e-mail: cemaia@mail.ru

Obukhov A. G., Doctor Physics and Mathematics, professor of Tyumen State Oil and Gas University, phone: 89220014998, e-mail: aobukhov@tsogu.ru