

УДК 519.63+533.6

## УЧЕТ ВЛИЯНИЯ ЦЕНТРОБЕЖНОЙ СИЛЫ ПРИ ЧИСЛЕННОМ МОДЕЛИРОВАНИИ ВОСХОДЯЩЕГО ЗАКРУЧЕННОГО ПОТОКА ГАЗА ACCOUNTING INFLUENCE OF CENTRIFUGAL FORCE IN THE NUMERICAL MODELING OF RISING SWIRLED GAS FLOW

**С. П. Баутин, А. Г. Обухов**  
S. P. Bautin, A. G. Obukhov

*Уральский государственный университет путей сообщения, г. Екатеринбург  
Тюменский государственный нефтегазовый университет, г. Тюмень*

*Ключевые слова: полная система уравнений Навье — Стокса; начальные и краевые условия;  
газодинамические характеристики; центробежная сила*  
*Key words: complete system of Navier — Stokes equations; initial and boundary conditions;  
gas-dynamic characteristics; centrifugal force*

При исследовании сложных течений газа используются модели сжимаемой сплошной среды, основанные на численном решении полной системы уравнений Навье — Стокса [1, 2]. Такие модели наиболее адекватно описывают физические процессы в указанных течениях, поскольку последовательно учитывают диссипативные свойства сжимаемой сплошной среды — вязкости и теплопроводности.

Теоретические и численные исследования, проведенные в работах [2–6], подтвердили предложенную в [7] общую схему возникновения и последующего функционирования восходящего закрученного потока. Основная идея предложенной в [7] схемы возникновения восходящего закрученного потока заключается в том, что в результате локального прогрева поверхности суши или водной поверхности появляется восходящий поток воздуха. Заменяющее его радиальное течение под действием силы инерции (силы Кориолиса) приобретает осевую закрутку.

В серии работ [8–10] предложенная схема получила экспериментальное подтверждение. В этих работах свободный вихрь инициировался нагревом снизу металлической круглой плиты пламенем газовой горелки. Появление радиального движения воздуха и его последующая осевая закрутка может инициироваться как локальным нагревом подстилающей поверхности, так и холодным вертикальным продувом. Последний способ получения восходящего закрученного потока был успешно реализован в лабораторных условиях [11].

При правильном выборе начальных и граничных условий [12, 13] численное решение полной системы уравнений Навье — Стокса позволило смоделировать возникно-

вление и развитие сложных трехмерных нестационарных течений сжимаемого вязкого теплопроводного газа в восходящем закрученном потоке [14–18].

Во всех упомянутых выше исследованиях при численном моделировании предполагалась малой и не учитывалась центробежная сила, действующая на частицы газа как результат вращения Земли.

Целью данной работы является последовательный учет центробежной силы при численных расчетах газодинамических характеристик трехмерного нестационарного течения сжимаемого вязкого теплопроводного газа в восходящем закрученном потоке, вызванном вертикальным холодным продувом.

*Полная система уравнений Навье — Стокса без учета влияния центробежной силы.*

При моделировании сложных течений упругой сплошной среды, обладающей диссипативными свойствами (вязкостью и теплопроводностью), используется полная система уравнений Навье — Стокса, которая будучи записанной в безразмерных переменных с учетом действия сил тяжести и Кориолиса в векторной форме имеет вид [14]

$$\begin{cases} \rho_t + \vec{V} \cdot \nabla \rho + \rho \operatorname{div} \vec{V} = 0, \\ \vec{V}_t + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} + \frac{T}{\rho} \nabla \rho + \frac{1}{\gamma} \nabla T = \vec{g} - 2\vec{\Omega} \times \vec{V} + \frac{\mu_0}{\rho} \left[ \frac{1}{4} \nabla (\operatorname{div} \vec{V}) + \frac{3}{4} \Delta \vec{V} \right], \\ T_t + \vec{V} \cdot \nabla T + (\gamma - 1) T \operatorname{div} \vec{V} = \frac{\kappa_0}{\rho} \Delta T + \frac{\mu_0 \gamma (\gamma - 1)}{2\rho} \left\{ \left[ (u_x - v_y)^2 + \right. \right. \\ \left. \left. + (u_z - w_x)^2 + (v_y - w_z)^2 \right] + \frac{3}{2} \left[ (u_y + v_x)^2 + (u_z + w_x)^2 + (v_z + w_y)^2 \right] \right\}, \end{cases} \quad (1)$$

где значения безразмерных коэффициентов вязкости и теплопроводности следующие:  $\mu_0 = 0,001$ ,  $\kappa_0 \approx 1,458333\mu_0$ .

Эта система в дифференциальной форме передает законы сохранения массы, импульса и энергии в движущейся сплошной среде.

В системе (1):  $t$  — время;  $x, y, z$  — декартовы координаты;  $\rho$  — плотность газа;  $\vec{V} = (u, v, w)$  — вектор скорости газа с проекциями на соответствующие декартовы оси;  $T$  — температура газа;  $\vec{g} = (0, 0, -g)$  — вектор ускорения силы тяжести, а  $g = \text{const} > 0$ ;  $-2\vec{\Omega} \times \vec{V} = (av - bw, -au, bu)$  — вектор ускорения Кориолиса, где  $a = 2\Omega \sin \psi$ ,  $b = 2\Omega \cos \psi$ ,  $\Omega = |\vec{\Omega}|$ ;  $\vec{\Omega}$  — вектор угловой скорости вращения Земли;  $\psi$  — широта точки  $O$  — начала декартовой системы координат  $xOyOz$ , вращающейся вместе с Землей.

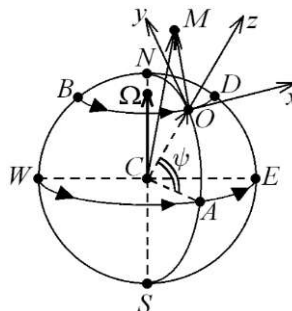
*Полная система уравнений Навье — Стокса с учетом влияния силы инерции.*

В книгах [7, 14] приведена система уравнений газовой динамики при учете действия сил тяжести и Кориолиса, но без учета действия центробежной силы:

$$\vec{F}_{\text{цб}} = -\rho \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}),$$

где  $\vec{r}$  — радиус-вектор точки  $M$  в неподвижной системе координат с центром в точке  $C$  (рис. 1).

Рис. 1. Рассматриваемые системы координат



Для записи этой силы в подвижной системе координат с центром в точке  $O$  имеем

$$\vec{r} = \vec{CM} = \vec{CO} + \vec{OM} = (0, 0, R_{зем}) + (x, y, z),$$

где  $R_{зем}$  — радиус Земли.

Следовательно, в подвижной системе координат центробежная сила задается соотношением

$$\vec{F}_{цб} = -\rho \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \{\vec{CO} + \vec{OM}\}).$$

С учетом свойства векторного произведения

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$$

получаем нужную для вычислений формулу

$$\vec{F}_{цб} = -\rho \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times (0, 0, R_{зем})) - \rho \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times (x, y, z)). \quad (2)$$

Каждое из слагаемых в формуле (2) вычисляется отдельно с учетом координат вектора  $\vec{\Omega}$  в подвижной системе координат [6, 7] (см. рис. 1):

$$\vec{\Omega} = (0, \Omega \cos \psi, \Omega \sin \psi).$$

Последовательное вычисление векторных произведений для первого слагаемого из формулы (2) дает следующее:

$$\begin{aligned} 1) \quad \vec{\Omega} \times (0, 0, R_{зем}) &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & \Omega \cos \psi & \Omega \sin \psi \\ 0 & 0 & R_{зем} \end{vmatrix} = \Omega R_{зем} \cos \psi \vec{i}; \\ 2) \quad \vec{\Omega} \times (\Omega R_{зем} \cos \psi, 0, 0) &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & \Omega \cos \psi & \Omega \sin \psi \\ \Omega R_{зем} \cos \psi & 0 & 0 \end{vmatrix} = \\ &= \Omega^2 R_{зем} \cos \psi \sin \psi \vec{j} - \Omega^2 R_{зем} \cos^2 \psi \vec{k} = \Omega^2 R_{зем} \left( 0; \frac{1}{2} \sin 2\psi; -\cos^2 \psi \right). \end{aligned}$$

Последовательное вычисление векторных произведений для второго слагаемого из формулы (2) дает следующее:

$$\begin{aligned} 1) \quad \vec{\Omega} \times (x, y, z) &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & \Omega \cos \psi & \Omega \sin \psi \\ x & y & z \end{vmatrix} = \\ &= \Omega (z \cos \psi - y \sin \psi) \vec{i} + \Omega x \sin \psi \vec{j} - \Omega x \cos \psi \vec{k}; \\ 2) \quad \Omega^2 \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & \cos \psi & \sin \psi \\ z \cos \psi - y \sin \psi & x \sin \psi & -x \cos \psi \end{vmatrix} &= \\ &= \Omega^2 \left[ (-x \cos^2 \psi - x \sin^2 \psi) \vec{i} + (z \cos \psi \sin \psi - y \sin^2 \psi) \vec{j} - \right. \\ &\quad \left. - (z \cos^2 \psi - y \sin \psi \cos \psi) \vec{k} \right] = \\ &= \Omega^2 (-x; z \sin \psi \cos \psi - y \sin^2 \psi; -z \cos^2 \psi + y \sin \psi \cos \psi). \end{aligned}$$

Итак,

$$\begin{aligned} \vec{F}_{цб} &= -\rho \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}) = -\rho \Omega^2 R_{зем} \left( 0; \frac{1}{2} \sin 2\psi; -\cos^2 \psi \right) - \\ &- \rho \Omega^2 (-x; z \sin \psi \cos \psi - y \sin^2 \psi; -z \cos^2 \psi + y \sin \psi \cos \psi) = \end{aligned}$$

$$= \rho \Omega^2 x \vec{i} - \rho \Omega^2 \left( \frac{1}{2} R_{зем} \sin 2\psi + \frac{1}{2} z \sin 2\psi - y \sin^2 \psi \right) \vec{j} + \\ + \rho \Omega^2 \left( R_{зем} \cos^2 \psi + z \cos^2 \psi - \frac{1}{2} y \sin 2\psi \right) \vec{k}.$$

Учет центробежной силы, вызванной вращением Земли, сводится к добавлению во второе уравнение полной системы уравнений Навье — Стокса центробежного ускорения:

$$-\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}) = -\Omega^2 R_{зем} \left( 0; \frac{1}{2} \sin 2\psi; -\cos^2 \psi \right) - \\ - \Omega^2 \left( -x; z \sin \psi \cos \psi - y \sin^2 \psi; -z \cos^2 \psi + y \sin \psi \cos \psi \right) = \\ = \Omega^2 x \vec{i} - \Omega^2 \left( \frac{1}{2} R_{зем} \sin 2\psi + \frac{1}{2} z \sin 2\psi - y \sin^2 \psi \right) \vec{j} + \\ + \Omega^2 \left( R_{зем} \cos^2 \psi + z \cos^2 \psi - \frac{1}{2} y \sin 2\psi \right) \vec{k}.$$

При этом полная система уравнений Навье — Стокса с учетом действия центробежной силы будет иметь вид

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_t + \vec{V} \cdot \nabla \rho + \rho \operatorname{div} \vec{V} = 0, \\ \vec{V}_t + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} + \frac{T}{\rho} \nabla \rho + \frac{1}{\gamma} \nabla T = \vec{g} - 2\vec{\Omega} \times \vec{V} - \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}) + \\ + \frac{\mu_0}{\rho} \left[ \frac{1}{4} \nabla (\operatorname{div} \vec{V}) + \frac{3}{4} \Delta \vec{V} \right], \\ T_t + \vec{V} \cdot \nabla T + (\gamma - 1) T \operatorname{div} \vec{V} = \frac{\kappa_0}{\rho} \Delta T + \frac{\mu_0 \gamma (\gamma - 1)}{2\rho} \left\{ \left[ (u_x - v_y)^2 + \right. \right. \\ \left. \left. + (u_x - w_z)^2 + (v_y - w_z)^2 \right] + \frac{3}{2} \left[ (u_y + v_x)^2 + (u_z + w_x)^2 + (v_z + w_y)^2 \right] \right\}. \end{array} \right. \quad (3)$$

В качестве начальных условий при описании конкретного течения сжимаемого вязкого теплопроводного газа в случае постоянных значений коэффициентов вязкости и теплопроводности взяты функции, задающие точное решение [12] системы (1):

$$u = 0, v = 0, w = 0, T_0(z) = 1 - kz, k = \frac{Tx_{00}}{T_{00}},$$

$$l = 0,0065 \frac{K}{M}, x_{00} = 50, T_{00} = 288^\circ K \quad (4)$$

$$\text{и} \quad \rho_0(z) = (1 - kz)^{\nu-1}; \quad \nu = \frac{\gamma g}{k} = \text{const} > 0. \quad (5)$$

Расчетная область представляет собой прямоугольный параллелепипед с длинами сторон  $x^0 = 1$ ,  $y^0 = 1$  и  $z^0 = 0,04$  вдоль осей  $Ox$ ,  $Oy$  и  $Oz$  соответственно. Для плотности на всех шести гранях параллелепипеда ( $x = 0$ ,  $x = x^0$ ,  $y = 0$ ,  $y = y^0$ ,  $z = 0$ ,  $z = z^0$ ) ставится «условие непрерывности» потока [13]. Краевые условия для компонент вектора скорости газа соответствуют «условиям непротекания» для нормальной составляющей вектора скорости и «условиям симметрии» для двух других компонент вектора скорости течения [13]. Для температуры на всех шести гранях задаются условия теплоизоляции [13]. Продув газа через вертикальную трубу моделируется заданием вертикальной скорости течения газа в зависимости от времени  $t$  в виде

$$w(t) = 0,003 \cdot [1 - \exp(-10t)] \quad (6)$$

через квадратное отверстие размером  $0,1 \times 0,1$  в центре верхней грани расчетной области. Расчеты проводились при следующих входных параметрах: масштабные размерные значения плотности, скорости, расстояния и времени равны соответственно

$$\rho_{00} = 1,2928 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}, u_{00} = 333 \frac{\text{м}}{\text{с}}, x_{00} = 50, t_{00} = x_{00} / u_{00} = 0,15 \text{ с}.$$

Разностные шаги по трем пространственным переменным  $\Delta x = \Delta y = 0,005$  (размерное значение 0,25 м),  $\Delta z = 0,004$  (размерное значение 0,2 м), а шаг по времени  $\Delta t = 0,001$  (размерное значение 0,00015 с).

*Сопоставление результатов численного решения полной системы уравнений Навье — Стокса без учета и с учетом действия центробежной силы.*

Для сопоставления результатов численного решения полной системы уравнений Навье — Стокса без учета влияния центробежной силы (1) и с учетом влияния центробежной силы (3) были проведены расчеты течений газа в восходящем закрученном потоке, инициированном вертикальным продувом газа вверх [15, 16] при одинаковых входных данных. Что касается визуального сопоставления результатов расчетов газодинамических параметров численного решения системы (1) и системы (3), то различия между ними не фиксируются. Сопоставление характерных безразмерных численных значений газодинамических характеристик возникающего течения на высоте 1 м в фиксированный момент времени, соответствующий 30000 расчетному шагу, приводится в таблице.

***Сопоставление характерных безразмерных численных значений  
газодинамических характеристик***

| Газодинамический параметр | Расчет без учета центробежной силы | Расчет с учетом центробежной силы | Отличие, %          |
|---------------------------|------------------------------------|-----------------------------------|---------------------|
| $\rho_{\min}$             | 0,999559274                        | 0,999559299                       | $2,5 \cdot 10^{-6}$ |
| $T_{\min}$                | 0,998668086                        | 0,998668132                       | $4,6 \cdot 10^{-6}$ |
| $p_{\min}$                | 0,998227947                        | 0,998228018                       | $7,1 \cdot 10^{-6}$ |
| $u_{\max}$                | 0,0054516                          | 0,0054337                         | 0,328               |
| $u_{\min}$                | -0,0052687                         | -0,0052865                        | 0,338               |
| $v_{\max}$                | 0,0053851                          | 0,0053799                         | 0,097               |
| $v_{\min}$                | -0,0051108                         | -0,0051168                        | 0,117               |
| $w_{\max}$                | 0,0015431909                       | 0,0015431826                      | $5,4 \cdot 10^{-4}$ |
| $W$                       | $3,1141 \cdot 10^{-7}$             | $3,1142 \cdot 10^{-7}$            | $3,2 \cdot 10^{-3}$ |
| $W_p$                     | $3,0093 \cdot 10^{-7}$             | $3,0083 \cdot 10^{-7}$            | $3,3 \cdot 10^{-2}$ |

Из сопоставления результатов расчета основных газодинамических характеристик без учета и с учетом влияния центробежной силы видно, что значения основных термодинамических параметров отличаются в среднем на  $4,7 \cdot 10^{-6} \%$ . Центробежная сила практически не влияет на термодинамические параметры. Значения скоростных характеристик отличаются в среднем на 0,22 % для  $x$ -компоненты и  $y$ -компоненты и на  $5,4 \cdot 10^{-4} \%$  для  $z$ -компоненты. То есть влияние центробежной силы на вертикальную составляющую скорости течения частиц газа значительно меньше, чем на две другие компоненты. Отличие же значений энергетических характеристик не превосходит сотой доли процента. Таким образом, можно сделать вывод о том, что влияние центробежной силы на все газодинамические параметры сложных течений весьма незначительно.

*Исследования поддержаны Министерством образования и науки РФ (проект № 3023).*

### Список литературы

1. Баутин С. П. Представление решений системы уравнений Навье — Стокса в окрестности контактной характеристики // Прикладная математика и механика. – 1987. – Т. 51. – Вып. 4. – С. 574–584.
2. Баутин С. П. Характеристическая задача Коши и ее приложения в газовой динамике. – Новосибирск: Наука, 2009. – 368 с.
3. Баутин С. П., Обухов А. Г. Математическое моделирование разрушительных атмосферных вихрей. – Новосибирск: Наука, 2012. – 152 с.
4. Баутин С. П., Обухов А. Г. Математическое моделирование и численный расчет течений в придонной части тропического циклона // Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математические науки. Информатика. – 2012. – № 4. – С. 175–183.
5. Обухов А. Г. Математическое моделирование и численные расчеты течений в придонной части торнадо // Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математические науки. Информатика. – 2012. – № 4. – С. 183–189.
6. Баутин С. П., Обухов А. Г. Математическое моделирование придонной части восходящего закрученного потока // Теплофизика высоких температур. – 2013. – Т. 51. – № 4. – С. 567–570.
7. Баутин С. П. Торнадо и сила Кориолиса. – Новосибирск: Наука, 2008. – 96 с.
8. Варакин А. Ю., Ромаш М. Э., Копейцев В. Н., Горбачев М. А. Моделирование свободных тепловых вихрей: генерация, устойчивость, управление // Теплофизика высоких температур. – 2010. – Т. 48. – № 6. – С. 965–972.
9. Варакин А. Ю., Ромаш М. Э., Копейцев В. Н., Горбачев М. А. Физическое моделирование воздушных смерчей: некоторые безразмерные параметры // Теплофизика высоких температур. – 2011. – Т. 49. – № 2. – С. 317–320.
10. Варакин А. Ю., Ромаш М. Э., Копейцев В. Н. Торнадо. – М.: Физматлит, 2011. – 312 с.
11. Баутин С. П., Баутин К. В., Макаров В. Н. Экспериментальное подтверждение возможности создания потока воздуха, закрученного силой Кориолиса // Вестник УрГУПС. – 2013. – № 2 (18). – С. 27–33.
12. Баутин С. П., Обухов А. Г. Одно точное стационарное решение системы уравнений газовой динамики // Известия вузов. Нефть и газ. – 2013. – № 4. – С. 81–86.
13. Баутин С. П., Обухов А. Г. Об одном виде краевых условий при расчете трехмерных нестационарных течений сжимаемого вязкого теплопроводного газа // Известия вузов. Нефть и газ. – 2013. – № 5. – С. 55–63.
14. Баутин С. П., Крутова И. Ю., Обухов А. Г., Баутин К. В. Разрушительные атмосферные вихри: теоремы, расчеты, эксперименты. – Новосибирск: Наука; Екатеринбург: Изд-во УрГУПС, 2013. – 215 с.
15. Абдубакова Л. В., Обухов А. Г. Численный расчет скоростных характеристик трехмерного восходящего закрученного потока газа // Известия высших учебных заведений. Нефть и газ. – 2014. – № 3. – С. 88–94.
16. Обухов А. Г., Абдубакова Л. В. Численный расчет термодинамических характеристик трехмерного восходящего закрученного потока газа // Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математические науки. Информатика. – 2014. – № 7. – С. 157–165.
17. Абдубакова Л. В., Обухов А. Г. Численный расчет термодинамических параметров закрученного потока газа, инициированного холодным вертикальным продувом // Известия вузов. Нефть и газ. – 2014. – № 5 – С. 57–62.
18. Абдубакова Л. В., Обухов А. Г. Расчет плотности, температуры и давления трехмерного восходящего закрученного потока газа при вертикальном продуве // Нефтегазовое дело. – 2014. – Т. 12. – № 3. – С. 116–122.

### Сведения об авторах

**Баутин Сергей Петрович**, д. физ.-мат. н., профессор кафедры «Прикладная математика», Уральский государственный университет путей сообщений, г. Екатеринбург, тел. 89122221223, e-mail: SBautin@usurt.ru

**Обухов Александр Геннадьевич**, д. физ.-мат. н., профессор кафедры «Высшая математика», Тюменский государственный нефтегазовый университет, г. Тюмень, тел. 89220014998, e-mail: aobukhov@tsogu.ru

### Information about the authors

**Bautin S. P.**, Doctor of Physics and Mathematics, professor of the chair «Applied Mathematics», the Ural State University of Communication Lines, phone: 89122221223, e-mail: SBautin@usurt.ru

**Obukhov A. G.**, Doctor of Physics and Mathematics, professor of the chair «Higher State Mathematics», Tyumen State Oil and Gas University, phone: 89220014998, e-mail: aobukhov@tsogu.ru