УДК 622.279:681.5

НЕЛИНЕЙНЫЕ ЗАКОНЫ ФИЛЬТРАЦИИ ОДНОКОМПОНЕНТНЫХ ФЛЮИДОВ ПРИ БОЛЬШИХ СКОРОСТЯХ ПОТОКОВ

NONLINEAR FILTRATION LAWS OF ONE-COMPONENT FLUIDS AT HIGH FLOW RATES

В. А. Толпаев, К. С. Ахмедов, С. А. Гоголева
V. A. Tolpaev, K. S. Akhmedov, S. A. Gogoleva

ОАО «СевКавНИПИгаз», г. Ставрополь

Ключевые слова: ***закон Дарси; закон Форхгеймера; закон Барри-Конвея; давление; динамическая вязкость; проницаемость; эффективная проницаемость; число Рейнольдса; аппроксимация***
Key words: ***Darcy law; Forchheimer law; Barry Conway law; pressure; dynamic viscosity; Permeability; effective permeability; Reynolds number; approximation***

Впервые систематические экспериментальные исследования закономерностей фильтрации однокомпонентных жидкостей в пористых средах проводил в середине XIX века французский инженер-гидравлик Анри Филибер Гаспар Дарси. Результатом этих исследований является уравнение, связывающее скорость фильтрации $\vec{v}$ с градиентом давления p, называемое законом Дарси и которое в современных обозначениях для случая фильтрации газа, когда силами тяжести по сравнению с поверхностными силами давления пренебрегают, записывается в виде [1]

$$-grad\ p = \frac{\mu \cdot \vec{v}}{k}\ , \qquad (1)$$

где μ — коэффициент динамической вязкости газа, а k — проницаемость пористой среды.

В случае фильтрации весомой жидкости (воды, нефти) в уравнении (1) вместо гидродинамического давления p следует записывать приведенное давление $P = p + \rho \cdot g \cdot z + C$ [1]. В этой сумме $\rho \cdot g \cdot z$ представляет потенциал массовой силы тяжести, действующей на флюид со стороны Земли, z — аппликата точки наблюдения, отсчитываемая вдоль направленной вверх вертикальной оси, а p — плотность флюида и g — ускорение свободного падения. Третье слагаемое C — произвольная аддитивная постоянная, значение которой определяется назначением величины приведенного давления на нивелировочной плоскости, то есть плоскости отсчета, $z = 0$.

Ниже для конкретности будем подразумевать случай фильтрации газа, и в уравнениях применять только гидродинамическое давление p.

Более поздние и более точные экспериментальные исследования показали, что закон Дарси не универсален и имеет свои границы применимости, которые устанавливаются по значению безразмерного фильтрационного числа Рейнольдса, определяемого формулой [1]

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho \cdot v \cdot \sqrt{k}}{\mu}. \qquad (2)$$

В законе (1) коэффициент проницаемости k характеризует пропускную способность пористой среды при достаточно малых значениях числа Рейнольдса $\mathrm{Re} = \frac{\rho \cdot v \cdot \sqrt{k}}{\mu}$, не превышающих некоторого критического значения $\mathrm{Re}_{\text{кр}}$. Для уменьшения погрешностей закона Дарси при больших скоростях фильтрации введем в (1) безразмерный поправочный множитель $f(\mathrm{Re})$, с помощью которого закон фильтрации газа для больших скоростей представим в виде

$$-grad\ p = f(\mathrm{Re}) \cdot \frac{\mu \cdot \vec{v}}{k} = \frac{\mu \cdot \vec{v}}{k_{эфф}}. \qquad (3)$$

В уравнении (3) с целью экспериментального определения поправочного множителя $f(\mathrm{Re})$ применяются, следуя Р. Д. Барри и М. В. Конвей [2, 3], понятия эффективной проницаемости $k_{эфф}$ и проницаемости k Дарси. Проницаемостью k Дарси выбранного образца пористой среды называется измеренное опытным путем значение проницаемости на режиме фильтрации с некоторым малым зафиксированным числом Рейнольдса $\mathrm{Re}_0 = \frac{\rho \cdot v_0 \cdot \sqrt{k}}{\mu} < \mathrm{Re}$. Эффективной проницаемостью $k_{эфф}$ этого же образца пористой среды называется измеренное опытным путем значение проницаемости на режиме фильтрации с другим числом Рейнольдса $\mathrm{Re} = \frac{\rho \cdot v \cdot \sqrt{k}}{\mu} > \mathrm{Re}_{\text{кр}}$. Если провести серию опытов, и в каждом рассчитать отношение проницаемости Дарси k к эффективной проницаемости $k_{эфф}$ исследуемого образца пористой среды, то в результате получим таблично заданную функцию

$$\frac{k}{k_{эфф}} = f(\mathrm{Re}). \qquad (4)$$

Из общего нелинейного закона фильтрации (3) вытекают как частные случаи все известные законы фильтрации. Если в уравнениях (3) и (4) функция $f(\mathrm{Re}) \equiv 1$, получим классический закон линейной фильтрации — закон Дарси (1). Если поправочный множитель $f(\mathrm{Re})$ линейно зависит от числа Рейнольдса $f(\mathrm{Re}) = 1 + \beta \cdot \mathrm{Re}$, получим другой классический частный случай — закон нелинейной фильтрации Форхгеймера [1]

$$-grad\ p = \left(1 + \beta \cdot \frac{\rho \cdot v \cdot \sqrt{k}}{\mu}\right) \cdot \frac{\mu \cdot \vec{v}}{k} = \frac{\mu \cdot \vec{v}}{k} + \beta \cdot \frac{\rho \cdot v}{\sqrt{k}} \cdot \vec{v}. \qquad (5)$$

Для уменьшения погрешностей при больших скоростях фильтрации двучленного закона Форхгеймера (5) Р. Д. Барри и М. В. Конвей [2, 3, 4] предложили новую модель, содержащую кроме параметров k и β два дополнительных параметра k_{mr} и α:

$$\frac{k}{k_{эфф}} = f(\mathrm{Re}) = \frac{(1 + \beta \cdot \mathrm{Re})^{\alpha}}{k_{mr} \cdot (1 + \beta \cdot \mathrm{Re})^{\alpha} + 1 - k_{mr}}. \qquad (6)$$

Параметр k_{mr} в (6) может принимать значения от нуля до единицы включительно, а α принимает положительные значения. Из уравнения (6) видно, что если $k_{mr} = 0$ и показатель степени $\alpha = 1$, то (6) приводит к классическому уравнению Форхгеймера (5). Если $k_{mr} = 1$, то (6) приводит к линейному закону Дарси (1).

Куршиным А. П. в ЦАГИ им. профессора Н. Е. Жуковского проводились экспериментальные исследования эффективной проницаемости пористых металлов, волоконных материалов, графитов, образцов горных пород при сверхвысоких градиентах давлений до

1,5 *МПа / мм* . Согласно его исследованиям [5, 6, 7], зависимость $\frac{k}{k_{эфф}}$ можно описать функциями, линейно зависящими от числа Рейнольдса

$$\frac{k}{k_{эфф}} = f(\mathrm{Re}) = a + b \cdot \mathrm{Re} = a + b \cdot \frac{\rho \cdot v \cdot \sqrt{k}}{\mu}. \qquad (7)$$

Однако с тем уточнением, что параметры a и b на разных участках изменения числа Рейнольдса определяются различно. Аналитически зависимость коэффициентов a и b от числа $\mathrm{Re} = R$, согласно экспериментальным исследованиям Куршина А. П., можно представить следующим образом:

$$a = \begin{cases} a_1 = const & \text{при} \quad R \le R_1, \\ a_2 = a_1 + \frac{a_3 - a_1}{R_2 - R_1} \cdot (R - R_1) & \text{при} \quad R_1 \le R \le R_2, \\ a_3 = const & \text{при} \quad R \ge R_2; \end{cases} \qquad (8)$$

и

$$b = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad R \le R_1, \\ b_2 = \frac{b_3}{R_2 - R_1} \cdot (R - R_1) & \text{при} \quad R_1 \le R \le R_2, \\ b_3 = const & \text{при} \quad R \ge R_2. \end{cases} \qquad (9)$$

При малых скоростях фильтрации, когда $\mathrm{Re} \le R_1$, коэффициент проницаемости, по экспериментальным данным Куршина А. П., не зависит от числа Рейнольдса, и имеет место линейная фильтрация по закону Дарси. Во второй области $R_1 \le \mathrm{Re} \le R_2$, с ростом скорости фильтрации коэффициенты a и b возрастают до своих максимальных значений a_3 и b_3. Вторая область — это область переходного режима от ламинарного к турбулентному режиму течения. В третьей области $\mathrm{Re} \ge R_2$, по данным Куршина А. П., коэффициенты a и b остаются неизменными, равными максимальным, что указывает на сохранение турбулентного характера течения для больших чисел $\mathrm{Re} \ge R_2$.

Наглядную характеристику представленных экспериментальных законов нелинейной фильтрации дают графики зависимостей $\frac{k}{k_{эфф}}$ на рис. 1.

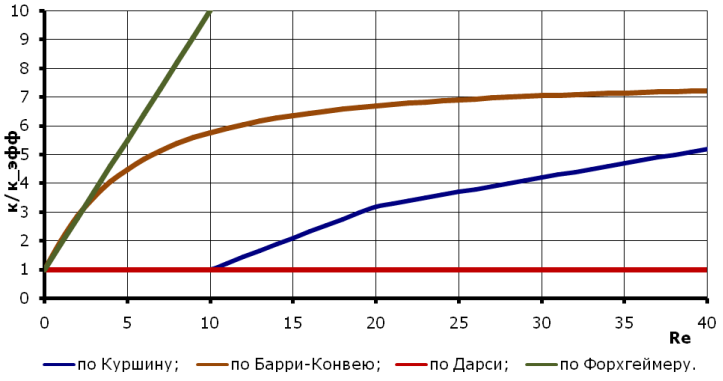

Рис. 1. ***Сравнение зависимостей*** $\frac{k}{k_{эфф}}$ ***от числа Рейнольдса для различных законов фильтраци***

Из представленных графиков, во-первых, видно, что на режимах фильтрации с малыми числами Рейнольдса законы Форхгеймера и Барри-Конвея практически одинаково описывают пропускную способность пористой среды. Таким образом, для режимов фильтрации с малыми числами Рейнольдса разумно применять в расчетах потоков более простой классический закон Форхгеймера. Во-вторых, видно, что с ростом скорости фильтрации (с увели-

чением числа Рейнольдса) пропускная способность пористой среды, количественно выражаемая значением эффективной проницаемости $k_{эфф}$, падает. По закону Барри-Конвея эффективная проницаемость $k_{эфф}$ асимптотически падает до некоторого минимального уровня, а по законам Форхгеймера и Куршина А. П. $k_{эфф}$ падает до нуля, что по представлениям Р. Д. Барри и М. В. Конвея является неправильным. На рис. 2 отдельно представлен характер изменения пропускной способности пористой среды по закону Барри-Конвея при различных значениях параметра α и при зафиксированном параметре $k_{mr} = 0,09$.

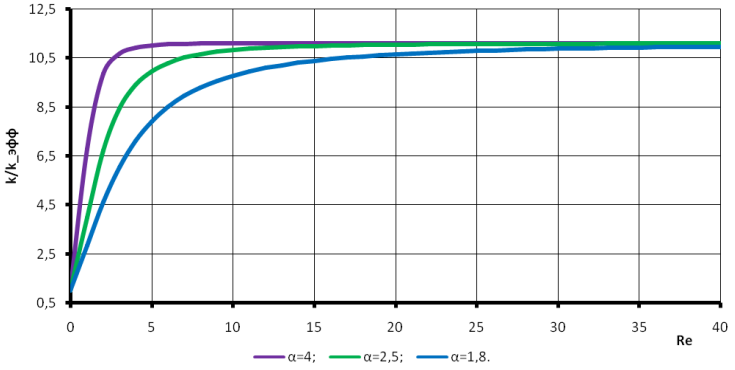

Рис. 2. ***Влияние на пропускную способность пористой среды по закону Барри-Конвея параметра*** α ***при зафиксированном параметре*** $k_{mr} = 0,09$

На рис. 3 представлен характер изменения пропускной способности пористой среды по закону Барри-Конвея при различных значениях параметра k_{mr} при зафиксированном параметре $\alpha = 2$.

Рис. 2, 3 снова подтверждают, что на режимах фильтрации с малыми числами Рейнольдса законы Форхгеймера и Барри-Конвея почти одинаково описывают пропускные способности пористой среды. Рис. 2, 3 помогают понять физический смысл новых введенных Р. Д. Барри и М. В. Конвеем фильтрационных параметров k_{mr} и α.

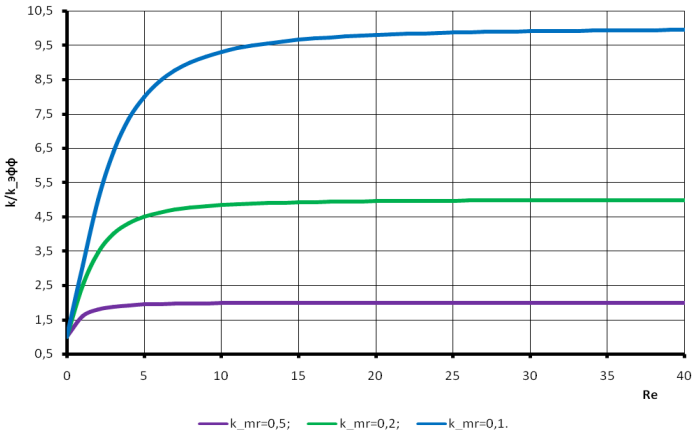

Рис. 3. ***Влияние по закону Барри-Конвея на пропускную способность пористой среды параметра*** k_{mr} ***при зафиксированном параметре*** $\alpha = 2$

Из них и из формулы (6) видно, что физический смысл параметра k_{mr} в том, что он задает предельное минимальное значение пропускной способности пористой среды при высоких скоростях фильтрации: $k_{эфф} \xrightarrow[\mathrm{Re}\to\infty]{} k \cdot k_{mr}$. Рисунки наглядно показывают физический смысл параметра α. Параметр α задает скорость падения пропускной способности

пористой среды: чем больше α, тем быстрее падает пропускная способность пористой среды, и эффективная проницаемость быстрее приближается к своей асимптотической минимальной величине.

Таким образом, Р. Д. Барри, М. В. Конвей и Куршин А. П. экспериментально доказали, что пропускная способность пористой среды, количественно определяемая эффективной проницаемостью $k_{эфф}$, уменьшается с ростом фильтрационного числа Рейнольдса по определенному закону. Наиболее естественной зависимостью $\frac{k}{k_{эфф}} = f(\mathrm{Re})$ для всех проницаемых пористых сред служит закон Барри-Конвея (6). Недостатком закона Барри-Конвея (6) является то, что непосредственно применить его для определения параметров k, β, k_{mr} и α на основе результатов газогидродинамических исследований скважин (ГДИ) весьма затруднительно. Поэтому возникает актуальная для практики задача преобразовать закон Барри-Конвея (6) так, чтобы модифицированный закон позволял строить удобные для обработки данных ГДИ математические модели притока газа к скважине. С приемлемой точностью в этом случае для диапазона практических значений чисел Рейнольдса [8] можно рекомендовать применение полиномиальных аппроксимаций закона Барри-Конвея (6) в виде

$$\frac{k}{k_{эфф}} = f(\mathrm{Re}) \approx 1 + c_1 \cdot \mathrm{Re} + c_2 \cdot \mathrm{Re}^2 + c_3 \cdot \mathrm{Re}^3 + c_4 \cdot \mathrm{Re}^4 + c_5 \cdot \mathrm{Re}^5 + \ldots \qquad (10)$$

При наличии полиномиальных аппроксимаций закона Барри-Конвея (6) общее уравнение (3) нелинейной фильтрации газа для больших скоростей будет представляться в виде

$$-grad\ p = \left[\sum_{m=0}^{n} c_m \cdot (\mathrm{Re})^m\right] \cdot \frac{\mu \cdot \bar{v}}{k}. \qquad (11)$$

Положительным качеством уравнения (11) является то, что по сравнению с уравнением (3) оно более приспособлено к решению важных практических задач обработки данных ГДИ. Поэтому задача построения полиномиальных аппроксимаций закона Барри-Конвея (6) для диапазона практических значений чисел Рейнольдса является актуальной.

Коэффициенты полиномиальных аппроксимаций закона Барри-Конвея предлагается рассчитывать в среде MS Excel следующим образом. Вначале, на 1-ом шаге, для заданного набора параметров β, k_{mr} и α табулируем вспомогательную функцию $Y = Y(\mathrm{Re})$:

$$Y = \frac{\frac{k}{k_{эфф}} - 1}{\mathrm{Re}} = \frac{(1+\beta \cdot \mathrm{Re})^{\alpha} - \left[k_{mr} \cdot (1+\beta \cdot \mathrm{Re})^{\alpha} + 1 - k_{mr}\right]}{\mathrm{Re} \cdot \left[k_{mr} \cdot (1+\beta \cdot \mathrm{Re})^{\alpha} + 1 - k_{mr}\right]}. \qquad (12)$$

Далее, на 2-ом шаге, средствами MS Excel [9] строим линию тренда $Y = c_1 + c_2 \cdot \mathrm{Re} + c_3 \cdot \mathrm{Re}^2 + \ldots$ с использованием встроенной функции вида ЛИНЕЙН (диапазон изменения Y; диапазон изменения Re^{1;2;3;4}) и находим коэффициенты c_1, c_2, c_3, …. Например, для параметров $\alpha = 2$, $\beta = 1$ и $k_{mr} = 0{,}1;\ 0{,}2;\ 0{,}5$ коэффициенты аппроксимирующего функцию (6) полинома 5-ой степени, найденные по описанному алгоритму, равны указанным в таблице значениям.

Коэффициенты аппроксимирующего закон Барри-Конвея (6) полинома

Коэффициенты	Параметры: $\alpha = 2$; $\beta = 1$		
	$k_{mr} = 0{,}1$	$k_{mr} = 0{,}2$	$k_{mr} = 0{,}5$
c_1	2,4060	1,6419	0,6053
c_2	–0,2591	–0,2443	–0,1083
c_3	0,0131	0,0155	0,0076
c_4	$-3{,}1 \cdot 10^{-4}$	$-4{,}30 \cdot 10^{-4}$	$-2{,}22 \cdot 10^{-4}$
c_5	$2{,}75 \cdot 10^{-6}$	$4{,}29 \cdot 10^{-6}$	$2{,}29 \cdot 10^{-6}$

Достаточная для практических целей точность аппроксимации закона Барри-Конвея при перечисленных значениях его параметров α, β и k_{mr} наглядно иллюстрируется графиками

на рис. 4, где приведены графики оригинала (6) и графики аппроксимирующих полиномов 5-ой степени. Возвращаясь к графикам на рис. 1, отметим, что в отличие от законов Форхгеймера и Барри-Конвея в законе Куршина А. П. выделяется начальный участок $\mathrm{Re} \le R_1$ малых чисел Рейнольдса, на котором имеет место линейная фильтрация по закону Дарси. Для того чтобы ввести в закон Барри-Конвея начальный участок $\mathrm{Re} \le R_1$ малых чисел Рейнольдса, уравнение (6) авторы предлагают заменить следующим уравнением:

$$\frac{k}{k_{эфф}} = 1 + \left(\frac{1}{k_{mr}} - 1\right) \cdot th\left(\frac{\mathrm{Re}}{\mathrm{Re}_{кр}}\right)^{\alpha}. \qquad (13)$$

Изменение эффективной проницаемости пористой среды по гипертангенсальному закону проиллюстрировано на рис. 5.

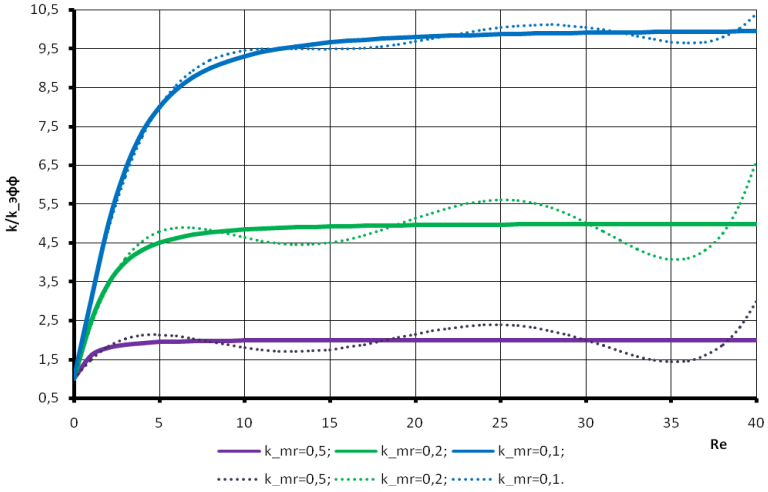

Рис. 4. ***Сравнение эффективных проницаемостей пористой среды по закону Барри-Конвея (6) с их аппроксимационными моделями (10)***

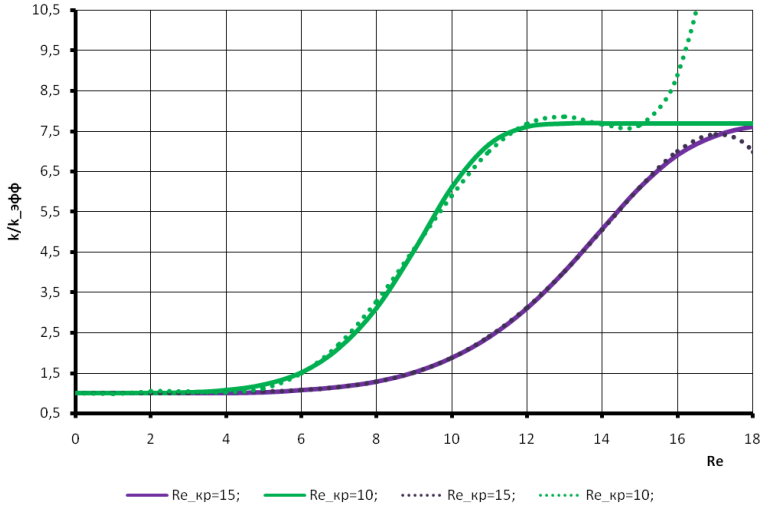

Рис. 5. ***Изменение эффективной проницаемости пористой среды по гипертангенсальному закону (13) (сплошные линии) и по аппроксимационным моделям (10) гипертангенсального закона (точечные линии). Параметры:*** $\alpha = 5$; $k_{mr} = 0{,}13$

Физический смысл фильтрационных параметров k_{mr} и α в гипертангенсальном законе (13) такой же, как и у одноименных параметров в законе Барри-Конвея. Параметр k_{mr} задает предельное минимальное значение пропускной способности пористой среды при высоких скоростях фильтрации: $k_{эфф} \xrightarrow[\mathrm{Re}\to\infty]{} k \cdot k_{mr}$, а параметр α задает скорость падения пропускной способности пористой среды: чем больше α, тем быстрее эффективная проницаемость приближается к своей асимптотической минимальной величине.

Таким образом, приемлемая точность аппроксимационных моделей (10), иллюстрируемая графиками на рисунках 4 и 5, позволяет рекомендовать к практическому применению в качестве универсального закона фильтрации газа (жидкости) при самых широких реальных диапазонах значений фильтрационных чисел Рейнольдса уравнение (11). Коэффициенты c_m уравнения (11) следует рассматривать как материальные константы пористой среды, подлежащие определению на основании обработки данных ГДИ. У каждого типа пористой среды может быть, в зависимости от геометрических особенностей строения порового пространства и механических свойств скелета пористой среды, свое количество и свои типовые значения материальных констант c_m.

Положительным качеством уравнения (11), в отличие от других законов (6), (7), (13), является то, что его форма позволяет разработать модифицированную методику применяемых сейчас классических способов обработки данных ГДИ под средства табличного процессора MS Excel [9] и уточнять основные фильтрационно-емкостные характеристики продуктивных пластов.

Список литературы

1. Басниев К. С. Нефтегазовая гидромеханика / К. С. Басниев, Н. М. Дмитриев, Г. Д. Розенберг. – Москва — Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2005.
2. Barree R. D. Beyond beta factors: a complete model for Darcy, Forchheimer and trans-Forchheimer flow in porous media / Barree, R. D., Conway M. W. // Paper SPE 89325 presented at the 2004 annual technical conference and exhibition, Houston, Texas 26–29 Sept 2004.
3. Barree R. D. Reply to Discussion of «Beyond Beta Factors: A Complete Model for Darcy, Forchheimer, and Trans-Forchheimer Flow in Porous Media» / Barree, R. D., Conway M. W. //– Journal of Petroleum Technology, Aug. 2005. – Pp. 73-74.
4. Jambhekar V. A. Forchheimer Porous-media Flow Models – Numerical Investigation and Comparison with Experimental Data [Текст]: Master's Thesis. – Stuttgart, 2011. – 85 p.
5. Куршин А. П. Закономерности изменения проницаемости пористых сред при фильтрационных течениях / А. П. Куршин // Ученые записки ЦАГИ. – Том XXXIX. – 2008. – № 1-2. – С. 125-135.
6. Берман Л. Б. Фильтрация газа в пористых средах при больших градиентах давления / Л. Б. Берман, А. П. Куршин // Газовая промышленность. – 1991. – № 4.
7. Куршин А. П. Исследование фильтрационных течений газа через образцы из кернов горных пород на режимах с критическим истечением / А. П. Куршин // МЖГ. – 1990. – № 6.
8. Коротаев Ю. П. Исследование границ применимости линейного закона фильтрации Дарси акустическим способом // Тр. ин-та МИНХиГП. – 1985. – Вып. 192.
9. Спиридонов О. В. Расширенные возможности Microsoft Excel 2003 / О. В. Спиридонов. – Центр дистанционных образовательных технологий МИЭМП, 2010.

Сведения об авторах

Толпаев Владимир Александрович, *д. ф.-м. н., профессор, заведующий лабораторией подземной гидродинамики, ОАО «Северо-Кавказский научно-исследовательский проектный институт природных газов», г. Ставрополь, e-mail: v.a.tolpaev@mail.ru*

Ахмедов Курбан Сапижуллаевич, *к. т. н., начальник отдела новых информационных технологий, ОАО «Северо-кавказский научно-исследовательский проектный институт природных газов», г. Ставрополь, e-mail: kurban2000@mail.ru*

Гоголева Светлана Анатольевна, *научный сотрудник лаборатории подземной гидродинамики, ОАО «Северо-Кавказский научно-исследовательский проектный институт природных газов», г. Ставрополь, e-mail: gogoleva.s.a@yandex.ru*

Information about the authors

Tolpaev V. A.*, Doctor of Physics and Mathematics, professor , head of the laboratory of underground hydrodynamics, OJSC «North Caucasus Research and Designing Institute of Natural Gases», Stavropol, e-mail: v.a.tolpaev@mail.ru*

Ahmedov K. S., *Candidate of Science in Engineering, head of the department for new information technologies, OJSC «North Caucasus Research and Designing Institute of Natural Gases», Stavropol, e-mail: kurban2000@mail.ru*

Gogoleva S. A.*, scientific worker of the laboratory of underground hydrodynamics, OJSC «North Caucasus Research and Designing Institute of Natural Gases», Stavropol, e-mail: gogoleva.s.a@yandex.ru*