УДК 519.63+533.6

ТРЕТЬЯ ПРОЕКЦИЯ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

THE THIRD PROJECTION OF THE MOTION EQUATION IN THE CYLINDRICAL COORDINATE SYSTEM

Д. Д. Баранникова, А. Г. Обухов
D. D. Barannikova, A. G. Obukhov

Тюменский государственный университет, г. Тюмень
Тюменский индустриальный университет, г. Тюмень

Ключевые слова: полная система уравнений Навье — Стокса; уравнение движения; частные производные; цилиндрическая система координат
Key words: the complete system of Navier-Stokes equations; the equation of motion; partial derivatives; a cylindrical coordinate system

При описании сложных трехмерных нестационарных течений сжимаемого вязкого теплопроводного газа [1–9] используется модель сжимаемой сплошной среды, основанная на численном решении полной системы уравнений Навье — Стокса. Эта модель описывает физические процессы течений газа в восходящих закрученных потоках как при холодном продуве [4–7], так и при локальном нагреве [8, 9] под действием сил тяжести и Кориолиса. Полная система уравнений Навье — Стокса, записанная в безразмерных переменных, с учетом действия силы тяжести и Кориолиса в скалярной форме имеет вид [2]

$$\begin{cases}
\rho_t + u\rho_x + v\rho_y + w\rho_z + \rho(u_x + v_y + w_z) = 0, \\
u_t + uu_x + vu_y + wu_z + \dfrac{T}{\gamma\rho}\rho_x + \dfrac{1}{\gamma}T_x = av - bw + \\
+\dfrac{\mu_0}{\rho}\left(u_{xx} + \dfrac{3}{4}u_{yy} + \dfrac{3}{4}u_{zz} + \dfrac{1}{4}v_{xy} + \dfrac{1}{4}w_{xz}\right), \\
v_t + uv_x + vv_y + wv_z + \dfrac{T}{\gamma\rho}\rho_y + \dfrac{1}{\gamma}T_y = -au + \\
+\dfrac{\mu_0}{\rho}\left(\dfrac{3}{4}v_{xx} + v_{yy} + \dfrac{3}{4}v_{zz} + \dfrac{1}{4}u_{xy} + \dfrac{1}{4}w_{yz}\right), \\
w_t + uw_x + vw_y + ww_z + \dfrac{T}{\gamma\rho}\rho_z + \dfrac{1}{\gamma}T_z = bu - g + \\
+\dfrac{\mu_0}{\rho}\left(\dfrac{3}{4}w_{xx} + \dfrac{3}{4}w_{yy} + w_{zz} + \dfrac{1}{4}u_{xz} + \dfrac{1}{4}v_{yz}\right), \\
T_t + uT_x + vT_y + wT_z + (\gamma-1)T(u_x + v_y + w_z) = \\
= \dfrac{\kappa_0}{\rho}(T_{xx} + T_{yy} + T_{zz}) + \\
+\dfrac{\mu_0\gamma(\gamma-1)}{2\rho}\{[(u_x - v_y)^2 + (u_x - w_z)^2 + (v_y - w_z)^2] + \\
+\dfrac{3}{2}[(u_y + v_x)^2 + (u_z + w_x)^2 + (v_z + w_y)^2]\}.
\end{cases} \tag{1}$$

В системе (1): t — время; x, y, z — декартовы координаты; ρ — плотность газа; μ_0 и κ_0 — постоянные значения безразмерных коэффициентов вязкости и теплопроводности; $\vec{V} = (u, v, w)$ — вектор скорости газа с проекциями на соответствующие декартовы оси; T — температура газа; $\vec{g} = (0, 0, -g)$ — вектор ускорения силы тяжести; $\gamma = 1.4$ — показатель политропы для воздуха; $-2\vec{\Omega} \times \vec{V} = (av - bw, -au, bu)$ — вектор ускорения силы Кориолиса, где $a = 2\Omega \sin\psi$, $b = 2\Omega \cos\psi$, $\Omega = |\vec{\Omega}|$; $\vec{\Omega}$ — вектор угловой скорости вращения Земли; ψ — широта точки O — начала декартовой системы координат $Oxyz$, вращающейся вместе с Землей.

Для численного решения полной системы уравнений Навье-Стокса при описании сложных течений газа при нагреве вертикальной области целесообразно использовать цилиндрическую систему координат. Выполним преобразование четвертого уравнения системы (1)

$$w_t + uw_x + vw_y + ww_z + \frac{T}{\gamma\rho}\rho_z + \frac{1}{\gamma}T_z = bu - g + \frac{\mu_0}{\rho}\left(\frac{3}{4}w_{xx} + \frac{3}{4}w_{yy} + w_{zz} + \frac{1}{4}u_{xz} + \frac{1}{4}v_{yz}\right) \quad (2)$$

с целью записи его в цилиндрической системе координат.

В книге [10] в качестве компонент вектора скорости газа в цилиндрической системе координат r, ϕ, z вместо u, v введены соответственно ζ — радиальная и η — окружная компоненты по формулам

$$u = \zeta\cos\phi - \eta\sin\phi; \qquad v = \zeta\sin\phi + \eta\cos\phi. \quad (3)$$

Частные производные первого порядка по пространственным переменным преобразовываются следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \cos\phi\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\phi}{r}\frac{\partial}{\partial\phi}; \qquad \frac{\partial}{\partial y} = \sin\phi\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\phi}{r}\frac{\partial}{\partial\phi}. \quad (4)$$

Поскольку независимая переменная z при переходе к цилиндрическим координатам не меняется, то и производные по этой переменной также не меняются.

Частные производные второго порядка по пространственным переменным преобразуются по формулам:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \left(\cos\phi\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\phi}{r}\frac{\partial}{\partial\phi}\right)\left(\cos\phi\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\phi}{r}\frac{\partial}{\partial\phi}\right) = \cos^2\phi\frac{\partial^2}{\partial r^2} - $$
$$-\frac{2\sin\phi\cos\phi}{r}\frac{\partial^2}{\partial r\partial\phi} + \frac{\sin^2\phi}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2} + \frac{\sin^2\phi}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{2\sin\phi\cos\phi}{r^2}\frac{\partial}{\partial\phi}; \quad (5)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} = \left(\sin\phi\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\phi}{r}\frac{\partial}{\partial\phi}\right)\left(\sin\phi\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\phi}{r}\frac{\partial}{\partial\phi}\right) = \sin^2\phi\frac{\partial^2}{\partial r^2} + $$
$$+\frac{2\sin\phi\cos\phi}{r}\frac{\partial^2}{\partial r\partial\phi} + \frac{\cos^2\phi}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2} + \frac{\cos^2\phi}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{2\sin\phi\cos\phi}{r^2}\frac{\partial}{\partial\phi}; \quad (6)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial z} = \left(\cos\phi \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\phi}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \frac{\partial}{\partial z} = \cos\phi \frac{\partial^2}{\partial r \partial z} - \frac{\sin\phi}{r} \frac{\partial^2}{\partial \phi \partial z}; \tag{7}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y \partial z} = \left(\sin\phi \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\phi}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \frac{\partial}{\partial z} = \sin\phi \frac{\partial^2}{\partial r \partial z} + \frac{\cos\phi}{r} \frac{\partial^2}{\partial \phi \partial z}. \tag{8}$$

С учетом соотношений (3)–(8) уравнение (2) может быть преобразовано следующим образом:

$$\begin{gathered}
w_t + (\zeta \cos\phi - \eta \sin\phi) \left(\cos\phi \, w_r - \frac{\sin\phi}{r} w_\phi \right) + \\
+ (\zeta \sin\phi + \eta \cos\phi) \left(\sin\phi \, w_r + \frac{\cos\phi}{r} w_\phi \right) + \\
+ w w_z + \frac{T}{\gamma\rho} \rho_z + \frac{1}{\gamma} T_z = b(\zeta \cos\phi - \eta \sin\phi) - g + \\
+ \frac{\mu_0}{\rho} \left[\frac{1}{4} \left(\cos^2\phi \, \zeta_{rz} - \sin\phi\cos\phi \, \eta_{rz} - \frac{\sin\phi\cos\phi}{r} \zeta_{\phi z} + \right. \right. \\
\left. + \frac{\sin^2\phi}{r} \eta_{\phi z} + \frac{\sin^2\phi}{r} \zeta_z + \frac{\sin\phi\cos\phi}{r} \eta_z \right) + \\
+ \frac{1}{4} \left(\sin^2\phi \, \zeta_{rz} - \sin\phi\cos\phi \, \eta_{rz} + \frac{\sin\phi\cos\phi}{r} \zeta_{\phi z} + \right. \\
\left. + \frac{\cos^2\phi}{r} \eta_{\phi z} + \frac{\cos^2\phi}{r} \zeta_z - \frac{\sin\phi\cos\phi}{r} \eta_z \right) + \\
+ \frac{3}{4} \left(\cos^2\phi \, w_{rr} - \frac{2\sin\phi\cos\phi}{r} w_{r\phi} + \frac{\sin^2\phi}{r^2} w_{\phi\phi} + \right. \\
\left. + \frac{\sin^2\phi}{r} w_r + \frac{2\sin\phi\cos\phi}{r^2} w_\phi \right) + \\
+ \frac{3}{4} \left(\cos^2\phi \, w_{rr} + \frac{2\sin\phi\cos\phi}{r} w_{r\phi} + \frac{\cos^2\phi}{r^2} w_{\phi\phi} + \right. \\
\left. \left. + \frac{\cos^2\phi}{r} w_r - \frac{2\sin\phi\cos\phi}{r^2} w_\phi \right) + w_{zz} \right].
\end{gathered}$$

После приведения подобных и использования формул тригонометрии третья проекция уравнения движения (2) в цилиндрической системе координат будет иметь вид

$$\begin{gathered}
w_t + \zeta \, w_r + \frac{\eta}{r} w_\phi + w w_z + \frac{T}{\gamma\rho} \rho_z + \frac{1}{\gamma} T_z = b\cos\phi \, \zeta - b\sin\phi \, \eta - g + \\
+ \frac{\mu_0}{\rho} \left(\frac{3}{4} w_{rr} + \frac{3}{4r^2} w_{\phi\phi} + w_{zz} + \frac{3}{4r} w_r + \frac{1}{4} \zeta_{rz} + \frac{1}{4r} \eta_{\phi z} + \frac{1}{4r} \zeta_z \right).
\end{gathered} \tag{9}$$

Таким образом, в данной работе проведены преобразования третьей проекции уравнения движения полной системы уравнений Навье — Стокса. В результате выполненных преобразований эта проекция переписана в цилиндрической системе координат, использование которой более целесообразно для описания сложных течений газа с осевой симметрией.

Исследования поддержаны Министерством образования и науки РФ (проект № 3023).

Список литературы

1. Баутин С. П., Обухов А. Г. Математическое моделирование придонной части восходящего закрученного потока // Теплофизика высоких температур. − 2013. − Т. 51. − № 4. − С. 567−570.
2. Баутин С. П., Крутова И. Ю., Обухов А. Г., Баутин К. В. Разрушительные атмосферные вихри: теоремы, расчеты, эксперименты. − Новосибирск: Наука; Екатеринбург: Изд-во УрГУПС, 2013. − 215 с.
3. Bautin S. P., Obukhov A. G. Mathematical Simulation of the Near-Bottom Section of an Ascending Twisting Flow // High Temperature.−2013.−V. 51.−No. 4.−P. 509−512.
4. Абдубакова Л. В., Обухов А. Г. Численный расчет скоростных характеристик трехмерного восходящего закрученного потока газа // Известия высших учебных заведений. Нефть и газ. – 2014. − № 3. – С. 88-94.
5. Обухов А. Г., Абдубакова Л. В. Численный расчет термодинамических характеристик трехмерного восходящего закрученного потока газа // Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математические науки. Информатика. – 2014. − № 7. − С. 157−165.
6. Абдубакова Л. В., Обухов А. Г. Численный расчет термодинамических параметров закрученного потока газа, инициированного холодным вертикальным продувом // Известия вузов. Нефть и газ. − 2014. − № 5 − С. 57−62.
7. Абдубакова Л. В., Обухов А. Г. Расчет плотности, температуры и давления трехмерного восходящего закрученного потока газа при вертикальном продуве // Нефтегазовое дело. – 2014. – Том 12, № 3. – С.116−122.
8. Обухов А. Г., Баранникова Д. Д. Особенности течения газа в начальной стадии формирования теплового восходящего закрученного потока // Известия вузов. Нефть и газ. − 2014. − № 6 − С. 65−70.
9. Баутин С. П., Крутова И. Ю., Обухов А. Г. Закрутка огненного вихря при учете сил тяжести и Кориолиса // Теплофизика высоких температур. − 2015. − Т. 53. – № 6. − С. 961–964.
10. Баутин С. П. Торнадо и сила Кориолиса. − Новосибирск: Наука. − 2008. – 96 с.

Сведения об авторах

Баранникова Дарья Дмитриевна*, старший преподаватель кафедры алгебры и математической логики, Тюменский государственный университет, г. Тюмень, тел. 89220700408, e-mail: lusy_and_jam@mail.ru*

Обухов Александр Геннадьевич, *д. ф.-м. н., профессор кафедры «Бизнес-информатика и математика», Тюменский индустриальный университет, г. Тюмень тел. 89220014998, e-mail: aobukhov@tsogu.ru*

Information about the authors

Barannikova D. D.*, senior lecturer of the chair «Algebra and mathematical, logics», Tyumen State University, phone: 89220700408, e-mail: lusy_and_jam@mail.ru*

Obukhov A. G., *Doctor of Physics and Mathematics, professor of the chair «Business-informatics and mathematics», Industrial University of Tyumen, phone: 89220014998, e-mail: aobukhov@tsogu.ru*