УДК 621.644.073

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ СТЕРЖНЕЙ ТИПА ТИМОШЕНКО К ОПРЕДЕЛЕНИЮ НАГРУЗОК НА ТРУБОПРОВОД

APPLICATION OF TIMOSHENKO BEAM THEORY FOR DEFINITION OF LOADS ON THE PIPELINE

С. М. Дорофеев, С. Ю. Торопов
S. M. Dorofeev, S. Yu.Toropov

Тюменское высшее военное инженерное командное училище, г. Тюмень
Тюменский индустриальный университет, г. Тюмень

Ключевые слова: трубопровод; напряжения; нагрузка на трубопровод; некорректная задача; теория стержней с учетом поперечного сдвига
Key words: pipeline; stress; load on pipeline; incorrect problem; transverse shear deformation beam theory

Трубопроводный транспорт является главным элементом транспортной инфраструктуры, обеспечивающей экспорт углеводородов, составляющий на сегодняшний день около 70 % всего экспорта и дающий 17 % ВВП, [1]. Поэтому поддержание трубопроводной системы в рабочем состоянии является задачей государственной важности.

Для проверки адекватности используемых моделей и методов расчета, используемых при проектировании трубопроводов, необходимы данные о действительных внутренних напряжениях и о внешних нагрузках со стороны грунта. Знание нагрузок на аварийный участок трубопровода позволяет также со значительной долей вероятности выяснить причины возникновения аварийных ситуаций. Данные о напряжениях и силах взаимодействия трубопровода с грунтом можно получить на основе анализа результатов мониторинга пространственного положения трубопровода, а также на вскрытых участках при проведении ремонтно-восстановительных работ. В настоящее время основным методом оценки НДС трубопровода, применяемым на практике, является косвенный метод, основанный на определении деформаций и напряжений по измеренным отклонениям трубопровода от начального положения.

Задача определения нагрузок и напряжений по измеренным перемещениям относится к так называемым «обратным задачам» [2]. Обратные задачи, как правило, оказываются некорректными. Некорректность проявляется в том, что небольшие погрешности измерения перемещений приводят к очень большим изменениям решения, то есть нагрузок и усилий.

Целью работы является анализ и совершенствование методов оценки внутренних напряжений и внешних нагрузок, действующих на участок трубопровода по его отклонению от проектного положения.

Для определения напряжений от изгиба обычно применяется классическая теория изгиба стержней, основанная на «гипотезе» плоских сечений (теория Бернулли – Эйлера). Все параметры НДС в этой теории выражаются через производные функции прогиба оси стержня [3]:

$$\theta = \frac{dw}{dx}, \quad M = EI \cdot \frac{d^2 w}{dx^2}, \quad Q = -EI \cdot \frac{d^3 w}{dx^3}, \quad q_n(x) = EI \frac{d^4 w}{dx^4}, \tag{1}$$

где $w(x)$ — прогиб, $\theta(x)$ — угол поворота оси, E — модуль упругости, I — момент инерции сечения, Q — перерезывающая сила, M — изгибающий момент, q_n — нормальная нагрузка на стержень, x — продольная координата.

В рассматриваемых задачах прогиб $w(x)$ измеряется в отдельных точках (узлах сетки) и неизбежно содержит погрешность измерения.

Для определения производных в (1) применяются конечноразностные формулы. Полная погрешность формул численного дифференцирования имеет вид [4]

$$\Delta W^{(p)} = C_1 h^m + C_2 \frac{\delta}{h^p} \cdot \tag{2}$$

Здесь $\Delta W^{(p)}$ — полная погрешность p-ой производной, первый член $C_1 \cdot h^m$ определяет погрешность аппроксимации, m – порядок аппроксимации, h — шаг сетки; второй член $C_2 \cdot \delta / h^p$ определяет неустранимую погрешность, [4], δ — погрешность измерения прогиба в узлах сетки, p — порядок производной.

Погрешность аппроксимации уменьшается при уменьшении шага сетки h, неустранимая погрешность увеличивается. Причем неустранимая погрешность растет тем быстрее, чем выше порядок производной.

Из (2) следует, что чем выше порядок производной p, тем быстрее растет погрешность при уменьшении шага сетки. Поэтому для определения параметров НДС желательно применять формулы, содержащие производные как можно более низкого порядка.

Кроме классической теории стержней имеется теория стержней с учетом деформаций поперечного сдвига [5]. В этой теории прогиб w(x) и угол поворота θ(x) считаются независимыми параметрами. Уравнения этой теории приведены ниже.

Уравнения равновесия такие же, как и в классической теории:

$$\frac{dM}{dx} = -Q, \quad \frac{dQ}{dx} = q_n. \tag{3}$$

Физические соотношения:

$$M = EI \cdot \kappa; \quad Q = GA \cdot \omega_{zx}. \tag{4}$$

Здесь $G = E/2(1+\nu)$ — модуль сдвига, ν — коэффициент Пуассона, A — площадь поперечного сечения стержня, ω_{xz} — деформация сдвига.

Геометрические соотношения:

$$\kappa = \frac{d\theta}{dx}; \quad \omega_{xz} = \theta - \frac{dw}{dx}. \tag{5}$$

Для определения изгибающего момента необходимо вычислить только первую производную от угла поворота θ(x), для определения поперечной силы Q по формулам (4) и (5) нужно вычислить первую производную прогиба w(x), а для определения распределенной нагрузки q(x) — вторую производную от прогиба w(x) и первую производную от угла поворота θ(x).

Обычными геодезическими методами с достаточной точностью можно измерить только прогиб w(x), угол поворота θ(x) измерить намного сложнее. Но угол можно измерять с помощью специальной аппаратуры, используемой на некоторых моделях внутритрубных диагностических комплексов. Этому вопросу сейчас уделяется значительное внимание, [6]. Но в данной работе такая возможность не рассматривается.

Хотя считается, что в теории с учетом сдвига прогиб и угол поворота – независимые переменные, между ними все-таки существует связь. Чтобы найти эту связь, выразим перерезывающую силу Q из первого уравнения (3):

$$Q = -\frac{dM}{dx} = -EI\frac{d\kappa}{dx} = -EI\frac{d^2\theta}{dx^2}.$$

С другой стороны перерезывающую силу Q можно выразить из второго уравнения (4)

$$Q = GA \cdot \omega_{xz} = GA \cdot \left(\theta - \frac{dw}{dx}\right).$$

Приравнивая эти выражения, получим уравнение, связывающее w(x) и θ(x),

$$-EI\frac{d^2\theta}{dx^2} = GA \cdot \left(\theta - \frac{dw}{dx}\right). \tag{6}$$

Отсюда получим

$$\frac{EI}{GA}\frac{d^2\theta}{dx^2} + \theta = \frac{dw}{dx}. \tag{7}$$

Найдем отношение EI/GA для трубы

$$\frac{EI}{GA} = \frac{E \cdot \pi D_{cp}^3 \delta}{E/(2(1+\nu)) \cdot 8 \cdot \pi D_{cp} \delta} = \frac{2(1+\nu)D_{cp}^2}{8}. \tag{8}$$

Перейдем к безразмерной координате

$$\xi = \frac{x}{L}. \tag{9}$$

Обозначим

$$\alpha = \frac{2(1+\nu)}{8} \cdot \left(\frac{D_{cp}}{L}\right)^2. \tag{10}$$

Тогда уравнение (7) примет вид

$$\alpha \frac{d^2\theta}{d\xi^2} + \theta = \frac{1}{L} \cdot \frac{dw}{d\xi}. \tag{11}$$

Граничные условия могут быть, например, такими: $\theta(0) = 0$, $\theta(1) = 0$ — «жесткая заделка», или $\theta'(0) = 0$, $\theta'(1) = 0$ — «шарнирное опирание».

Для реальных трубопроводов параметр α очень мал. Это значит, что угол θ будет практически совпадать с dw/dx, то есть будет такой же, как и в классической теории.

Уравнение (11) точно совпадает с уравнением регуляризации дифференцирования в вариационном методе регуляризации Тихонова [7]. Отличие только в том, что параметр α не подбирается, а задается.

Полученные результаты выглядят многообещающе. Но следует иметь в виду, что при вычислении деформации сдвига ω_x по формуле (6) приходится находить разность близких величин θ и dw/dx. При этом погрешность определения ω_{xz} будет много больше, чем погрешность исходных величин θ и dw/dx. А значит и погрешность поперечной силы Q и нагрузки q(x) тоже будет большой. Возможен и другой вариант действий: найти по (6.1) кривизну κ, затем по (5.1) найти момент M и наконец по (4) найти Q и q_n.

Таким образом, для вычисления нагрузки q_n потребуется один раз продифференцировать измеренную функцию w(x) и три раза функцию $\theta(x)$. Всего четыре дифференцирования. Это ровно столько же, сколько и в классической теории. Поэтому второй вариант не имеет никаких преимуществ по сравнению с классической теорией. Таким образом, рассмотренный вариант может иметь преимущество только для коротких участков трубопровода, когда параметр α не слишком мал.

Список литературы

1. Транспорт и связь в России. 2014: Стат.сб. / Росстат. – М., 2014. – 114 с.
2. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1986. – 288 с.
3. Работнов Ю. Н. Механика деформируемого твердого тела. – М.: Наука, 1979. – 744 с.
4. Калиткин Н. Н. Численные методы. – М.: Наука, 1978. – 512 с.
5. Теория оболочек с учетом поперечного сдвига / под ред. К. З. Галимова – Казань: Казанский университет, 1977. – 211 с.
6. Никишин В. Б. Пространственное позиционирование и аттестация магистральных трубопроводов на основе интеграции средств внутритрубной диагностики, подземной навигации и наземных геодезических измерений / / Мехатроника, автоматизация, управление. – 2011. – № 9. – С. 41-46.
7. Самарский А. А., Вабищевич П. Н. Численные методы решения обратных задач математической физики. – М.: Едиториал УРСС, 2004. – 478 с.

Сведения об авторах

Дорофеев Сергей Михайлович, *к. ф.-м. н., доцент кафедры «Естественно-научные дисциплины», Тюменское высшее военное инженерное командное училище, г. Тюмень, тел. 8(3452)434121, e-mail: dorludm@mail.ru*

Торопов Сергей Юрьевич, *д. т. н., профессор кафедры «Транспорт углеводородных ресурсов», Тюменский индустриальный университет, г. Тюмень, тел.: +7(3452)417025*

Information about the authors

Dorofeev S. M., *Candidate of Physical and Mathematical Sciences, associate professor of Department of Natural Sciences, Tyumen Higher Military Engineering Command School (Military Institute), Tyumen, phone: 8(3452)434121, e-mail: dorludm@mail.ru*

Toropov S. Iu., *Doctor of Engineering, professor of the Department of Transport of Hydrocarbon Resources, Industrial University of Tyumen, phone: +7(3452)417025*